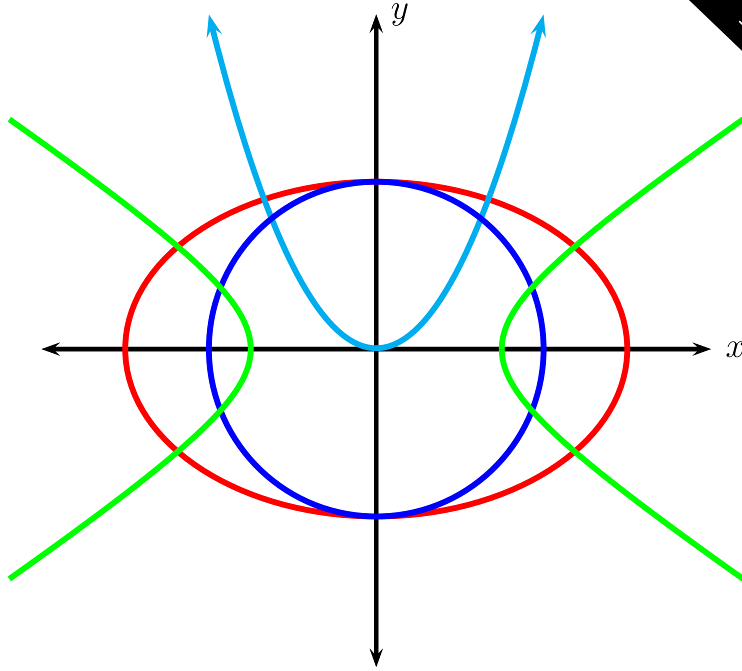

Primera Edición

Geometría Analítica Universitaria

Yam, Luna & Palacios

INAOE
CONAHCYT
CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS
Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo

GEOMETRÍA ANALÍTICA UNIVERSITARIA

Publicado por: Universidad Autónoma del Estado de Quintana Roo.

GEOMETRÍA ANALÍTICA UNIVERSITARIA

HECHO EN MÉXICO

ISBN:978-607-8792-37-5

PREFACIO

Entre los principales objetivos de las matemáticas se encuentran: el proveer métodos para medir y contar y, el más importante, propiciar el desarrollo del pensamiento lógico. La geometría analítica contribuye ampliamente al cumplimiento de estos objetivos, además se puede considerar la puerta de entrada al estudio de las matemáticas en el nivel superior, como el cálculo, las ecuaciones diferenciales y el álgebra lineal. El contenido de *Geometría Analítica Universitaria* ofrece una opción para cubrir, en un semestre, esta área tan importante de las matemáticas. El texto cubre la línea recta, las ecuaciones de las cónicas, coordenadas polares y ecuaciones paramétricas. Al final de cada capítulo se encuentran ejercicios y problemas seleccionados, que permiten reforzar los conceptos cubiertos en cada capítulo. Es recomendable que el estudiante resuelva los problemas propuestos y ponga atención especial a las demostraciones de teoremas geométricos por el método analítico, de este modo, el estudiante contará tanto con conocimientos sólidos de geometría analítica como con habilidades matemáticas para plantear y resolver problemas analíticamente.

Omar Yam *Abraham Luna* *Norma Palacios*

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

EL PLANO CARTESIANO

1.1. ¿Qué es la geometría analítica?

La *Geometría Analítica*[1] es la rama de las matemáticas donde el álgebra y la geometría euclidiana se juntan para plantear y resolver problemas geométricos. Con el enfoque de la geometría analítica el concepto de punto es representado por un par de coordenadas. Así, las rectas, triángulos, las secciones cónicas y en general, las figuras geométricas, son representadas por medio de ecuaciones. Este enfoque tiene como objetivo contar con un método diferente, el *método analítico*, para la solución de los problemas geométricos planteados. Es decir, la geometría analítica se encarga de analizar, mediante el uso de ecuaciones: distancias, ángulos, áreas y volúmenes entre otras propiedades geométricas.

La geometría analítica tiene como principales propósitos:

(i) dado el lugar geométrico de un conjunto de puntos que satisfacen ciertas condiciones, obtener su ecuación y

(ii) dada la ecuación de un lugar geométrico, obtener la gráfica de los puntos que satisfacen dicha ecuación.

[1]El desarrollo de la Geometría Analítica comienza en el siglo XVII con los trabajos de René Descartes (1596-1650). Debido a sus contribuciones a este tópico la geometría analítica es también llamada *Geometría Cartesiana* y las coordenadas rectangulares son llamadas *Coordenadas Cartesianas*.

Por estas razones, la geometría analítica es una herramienta muy poderosa para el estudio de ramas más avanzadas de las matemáticas como el cálculo de una y varias variables, las ecuaciones diferenciales y el análisis matemático entre otras.

El contenido aborda el estudio de distancias, ángulos, lugar geométrico de una ecuación, ecuación de un lugar geométrico, demostraciones de teoremas geométricos por medio de método analítico, la recta, las secciones cónicas, las coordenadas polares en el plano y las ecuaciones paramétricas.

1.2. Geometría en una dimensión: el eje de las abscisas

Como punto de inicio, se considera el sistema de coordenadas en una dimensión. Seguidamente, se discute la correspondencia entre este sistema de coordenadas y el conjunto de los números reales, así como la *relación de orden* en ambos.

1.2.1. El eje real o eje de las abscisas

Considere una recta horizontal ℓ, una unidad de longitud u y un punto 0 en ℓ. Por convención, se considera que los puntos a la derecha de 0 constituyen la *parte positiva* de ℓ y el conjunto de puntos a la izquierda de 0 son la *parte negativa de* ℓ. Un punto A tendrá la coordenada 1 si está a u unidades de distancia a la derecha de 0. Si el punto B tiene coordenada -2, significa que B está a dos unidades u a la izquierda de 0 como se muestra en la Figura (1.1). La recta ℓ es un eje coordenado en una dimensión y se conoce como el *eje real, eje de las abscisas* o *eje de las x* y el punto 0 se conoce como el *origen* del sistema de coordenadas.

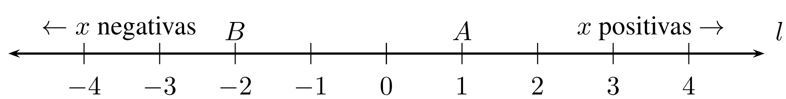

Figura 1.1 Eje coordenado de las abscisas o eje de las x.

La definición del eje de las abscisas proporciona una relación entre los números reales ($\mathbb{R}$) y los puntos en el eje x. Para cada número real positivo r, existe exactamente un punto x_r de ℓ, en la parte positiva del eje x, tal que la longitud del segmento de 0 a x_r es igual a r. Análogamente, para cada número real negativo q $(q < 0)$, existe exactamente un punto x_q, en la parte negativa de ℓ, tal que la longitud del segmento de 0 a x_q es igual a $|q| = -q$. Así, x_r y x_q son las *coordenadas* en ℓ de los correspondientes números r y q.

Por lo anterior, se puede decir que existe una relación *uno-a-uno* entre los números reales y el eje de las abscisas, donde a cada punto de la recta le corresponde un único número real y recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto del eje de las abscisas. Esta correspondencia se extiende también a la *relación de orden* $(<)$ en los números reales. Así, para dos puntos con coordenadas x_a, x_b; $x_a < x_b$, significa que x_a es menor que x_b o que x_a está a la izquierda de x_b o que $x_b - x_a$ es positivo; es decir, $0 < x_b - x_a$.

Considere ahora los puntos x_a, x_b y x_c sobre el eje de las abscisas. Para la relación $(<)$ se tienen las siguientes propiedades.

1. Para cualesquiera x_a y x_b se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones

   (i) $x_a < x_b$,

   (ii) $x_a = x_b$,

   (iii) $x_b < x_a$.

2. Si $x_a < x_b$ y $x_b < x_c$, entonces $x_a < x_c$.

3. Si $x_a < x_b$, para cualesquiera x_c se cumple: $x_a \pm x_c < x_b \pm x_c$.

4. Si $x_a < x_b$, para cualesquiera $0 < x_c$ se cumple: $x_a \cdot x_c < x_b \cdot x_c$.

5. Si $x_a < x_b$, para cualesquiera $x_c < 0$ se cumple: $x_b \cdot x_c < x_a \cdot x_c$.

Adicionalmente, $u_a \leq u_b$, indica cualquiera de las dos siguientes opciones: $u_a < u_b$ o $u_a = u_b$ y satisface también las propiedades de relación de orden ($<$).

Una de las características de la geometría analítica es la determinación de distancias por el método analítico. Para determinar distancias en el eje de las abscisas, considere el segmento de recta del punto A al punto B. Estos dos puntos determinan un *segmento dirigido* de la recta denotado por $\overrightarrow{AB}$ como se muestra en la Figura (1.2). El punto A se llama el *origen* o *punto inicial* y el punto B se llama *extremo* o *punto final*.

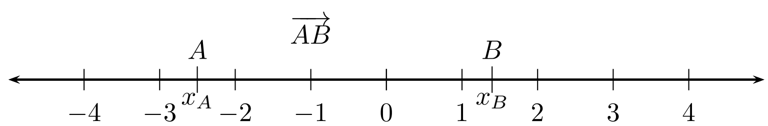

Figura 1.2 Segmento dirigido de A a B en el eje de las abscisas.

Definición 1.2.1 *Considere el segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ *con coordenada origen* x_A *y coordenada extremo* x_B*. Entonces la* longitud AB*, del segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$*, está dada por*

$$AB = x_B - x_A. \tag{1.1}$$

EJEMPLO 1.1

Considere los puntos $x_A = -2.4$ y $x_b = 4.0$. Calcule la longitud del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$.

Solución: De acuerdo la definición (1.2.1) , su longitud es

$$AB = x_B - x_A = 4.0 - (-2.4) = 6.4$$

Similarmente se tiene el segmento dirigido $\overrightarrow{BA}$ el cual tiene como origen al punto x_B como extremo al punto x_A y está dirigido en la dirección opuesta de $\overrightarrow{AB}$. Respecto de sus longitudes se tiene la siguiente relación

$$AB = x_B - x_A = -(x_A - x_B) = -BA.$$

En una dimensión, el signo de la longitud indica el sentido o dirección del segmento. Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, tienen una característica en común: la *magnitud de su longitud* o *distancia* dada de acuerdo con la siguiente

Definición 1.2.2 *Sean los puntos A y B con coordenadas x_A y x_B respectivamente. La distancia entre A y B se define como*

$$d = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_A - x_B|.$$

EJEMPLO 1.2

Sean $x_A = 3.5$ y $x_B = -1.75$ dos puntos sobre el eje x. Calcule la distancia d, entre ellos.

Solución: De acuerdo con la definición (1.2.2)

$$d = |x_A - x_B| = |3.5 - (-1.75)| = 5.25$$

1.2.2. Abscisa que divide un segmento en una razón dada

Dado un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, se quiere conocer cuál es la coordenada x_p del punto P, que lo divide en la razón m/n.

Definición 1.2.3 *Sea $\overrightarrow{AB}$ un segmento dirigido con punto inicial x_A y punto final x_B. Se dice que el punto P, con coordenada x_P divide al segmento en la razón, m/n, si se cumple que*

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}. \tag{1.2}$$

Puesto que $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{PB}$ son segmentos dirigidos, la razón puede ser positiva o negativa. En el primer caso $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{PB}$ tienen el mismo signo, P está entre A y B (ver problema (1.4)) y se dice que P divide a $\overrightarrow{AB}$ interiormente. Si la razón es negativa, entonces $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{PB}$ tienen signos opuestos y P es exterior al segmento $\overrightarrow{AB}$ (ver problema (1.5)). En este caso se dice que P divide a $\overrightarrow{AB}$ exteriormente.

Teorema 1.1 *La coordenada x_P del punto P que divide al segmento $\overrightarrow{AB}$ con punto inicial x_A y final x_B en la razón m/n, está dada por*

$$x_P = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}, \quad m \neq -n. \tag{1.3}$$

Demostración: De acuerdo con la definición (1.2.3),

$$\frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{m}{n}$$

de donde,

$$nx_P - nx_A = mx_B - mx_P.$$

Despejando x_P

$$x_P = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}, \quad m \neq -n.$$

■

Corolario 1.2.1 *La coordenada x_P del punto P que divide por la mitad al segmento $\overrightarrow{AB}$, con puntos inicial x_A y final x_B, está dada por*

$$x_P = \frac{x_B + x_A}{2}$$

Demostración: Puesto que el punto P, divide por la mitad al segmento $\overrightarrow{AB}$, entonces la razón es uno a uno. Por lo tanto, tomando $m = n = 1$ en el Teorema (1.1), se obtiene el resultado. ■

EJEMPLO 1.3

Considere los puntos $x_A = -3$ y $x_B = 5$, sobre el eje x. Encuentre la coordenada x_P, tal que está dividiendo al segmento $\overrightarrow{AB}$ en la razón

$$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}.$$

Solución: En este caso $m = 3$, $n = 1$, por lo tanto, x_P está dada por

$$x_P = \frac{3x_B + x_A}{4} = \frac{3(5) - 3}{4} = 3.$$

EJERCICIOS

1.1 Dados tres puntos A, B y C sobre el eje de las abscisas, con: $x_A = -5$, $x_B = 1$ y $x_C = -1$, calcule

a) $AB + BC$.

b) $AB + BC + CA$.

1.2 La abscisa del punto medio del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ es 2. Si $x_A = -3$, ¿cuál es la abscisa de B?

1.3 Sean A y B dos puntos sobre el eje de las abscisas, con: $x_A = 6$ y $x_B = -3$. Calcular la abscisa del punto P que divide al segmento $\overrightarrow{AB}$ en la razón $3/2$.

1.4 Para el segmento dirigido del ejercicio (1.3) Calcular la abscisa del punto P que divide al segmento $\overrightarrow{AB}$ en la razón $2/3$.

1.5 La distancia entre dos puntos A y B es 7. Si la abscisa de uno de los puntos es -5, hallar la abscisa del otro punto (*dos soluciones*).

1.6 Un extremo de un segmento es 3 y su punto medio es 1. Hallar la coordenada del origen.

1.7 Hallar los puntos de trisección del segmento dirigido $\overrightarrow{BA}$, donde $x_A = 6$ y $x_B = -3$.

PROBLEMAS

1.1 Demuestre que dados tres puntos A, B y C sobre el eje de las abscisas se tiene

a) $AB + BC = AC$.

b) $AB + BC + CA = 0$.

1.2 Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n-$puntos sobre el eje de las abscisas. Demuestre

a) $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n = A_1A_n$.

b) $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1 = 0$.

1.3 Considere el segmento $\overrightarrow{AB}$ y el punto P que lo divide en la razón m/n. Demuestre que el punto P divide al segmento $\overrightarrow{BA}$ en la razón n/m.

1.4 Demuestre que si el punto P divide a $\overrightarrow{AB}$ en una razón positiva, entonces P está entre A y B.

1.5 Demuestre que si el punto P divide a $\overrightarrow{AB}$ en una razón negativa, entonces P es exterior al segmento AB.

1.3. Geometría analítica en dos dimensiones: el Plano Cartesiano

Una vez presentado el eje de las abscisas, se extiende el estudio de la geometría a dos dimensiones. Para esto, considere dos líneas que se intersecan y que determinan un único plano. Dado un plano, se elige un punto O en él y cualesquiera dos líneas perpendiculares a través del punto O. El punto O se llamará *origen de coordenadas* y las líneas perpendiculares *ejes de coordenadas*, como se muestra en la Figura (1.3). Ambos ejes coordenados tienen las mismas propiedades que el eje definido en la sección (1.2.1). El eje horizontal será el eje de abscisas o eje de las x. El eje vertical se llamará *eje de las ordenadas* o eje de las y.

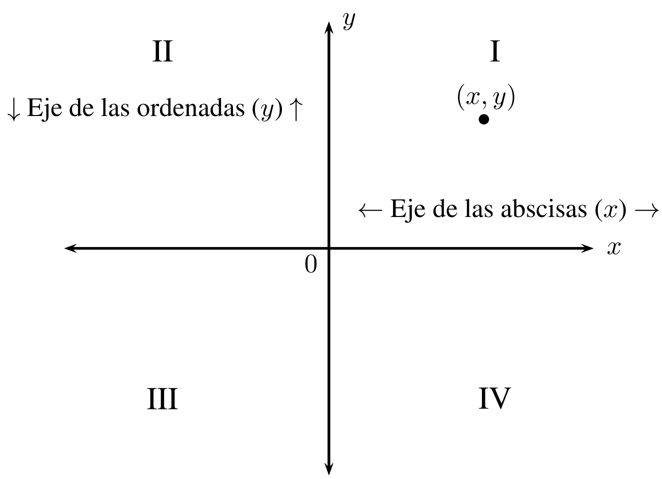

Figura 1.3 Plano cartesiano o sistema de coordenadas rectangulares.

En la Figura (1.3), se puede observar que los ejes coordenados forman cuatro regiones en el plano cartesiano llamados *cuadrantes*. Los cuadrantes son nombrados del I al IV en sentido contrario a la rotación de las manecillas del reloj. Así, el cuadrante I es la región superior derecha; el II, es la región superior izquierda; el III es la región inferior izquierda y el IV es la región inferior derecha. Tomando como referencia al origen y siguiendo el criterio de la definición del eje de las abscisas, se toma como positivo el lado derecho del eje x, por lo que el lado izquierdo será el lado negativo. Análogamente, se toma como positivo el lado superior del eje y, por lo que el lado inferior será el lado negativo. El criterio para los signos de las coordenadas (x, y) en el plano se muestra en la Tabla (1.1).

Tabla 1.1 Signos de los puntos (x, y) en el plano cartesiano.

Cuadrante	x	y	(x, y)
I	$+$	$+$	$(+,+)$
II	$-$	$+$	$(-,+)$
III	$-$	$-$	$(-,-)$
IV	$+$	$-$	$(+,-)$

Definición 1.3.1 *Dados los conjuntos A y B, su producto cartesiano, denotado por A×B, es el conjunto de todas las posibles parejas de elementos tales que el primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo elemento pertenece al conjunto B, es decir, A×B={(a,b):a∈A, b∈B}.*

De la definición (1.3.1), las coordenadas (x, y), resultan ser elementos del producto cartesiano de los reales con los reales, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, el cual suele escribirse como $\mathbb{R}^2$. Extendiendo el resultado obtenido en la sección (1.2.1) se tiene que, para el plano cartesiano, existe una correspondencia uno a uno entre los puntos (x, y) del plano y los elementos de $\mathbb{R}^2$. Si A es un punto del plano sus correspondientes coordenadas se denotaran por (x_A, y_A).

1.3.1. Coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada

En la sección (1.2.2), se encontró una forma de obtener la coordenada de un punto que divide a un segmento de recta dirigido en una razón dada. Este resultado será extendido al plano cartesiano.

Teorema 1.2 *Considere el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{AB}$, en el plano. Si (x_A, y_A) y (x_B, y_B) son las coordenadas de los puntos A y B respectivamente, entonces las coordenadas (x_P, y_P) del punto P que divide a este segmento en la razón m/n, con $m \neq -n$, son*

$$x_p = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}, \tag{1.4}$$

$$y_p = \frac{my_B + ny_A}{m+n}. \tag{1.5}$$

Demostración: La demostración es análoga a la presentada en el Teorema (1.1). Considere los puntos A y B con coordenadas (x_A, y_A) y (x_B, y_B) respectivamente. Sin pérdida de generalidad se puede considerar al punto P en $\overrightarrow{AB}$ como se muestra en la Figura (1.4). Los

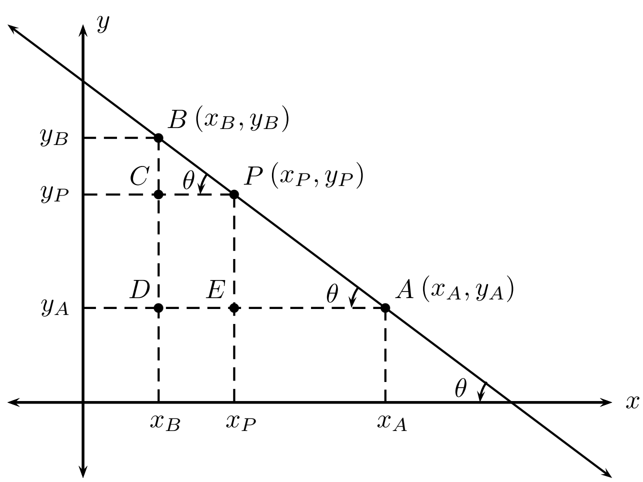

Figura 1.4 Coordenadas del punto (x_P, y_P) del punto P que divide al segmento ABen la razón m/n.

triángulos BCP, PEA y BDA son *semejantes*. Así, para el triángulo BDA

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} = \frac{AE}{ED}$$
$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} = \frac{DC}{CB}.$$

de donde,

$$\frac{m}{n} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P}$$
$$\frac{m}{n} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P}.$$

Despejando x_P y y_P, se completa la demostración. ■

Corolario 1.3.1 *Las coordenadas* (x_m, y_m) *del punto medio del segmento de recta* $\overrightarrow{AB}$*, con puntos inicial y final* (x_A, y_A) *y* (x_B, y_B)*, son*

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_m = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Demostración: La demostración es análoga a la presentada en el Corolario (1.2.1). ■

1.3.2. Distancia entre dos puntos.

Como se mencionó al inicio de este capítulo, el concepto de distancia es fundamental para el estudio de la geometría, así como también para otras áreas de las matemáticas. El cálculo de la distancia entre dos puntos está dado por el siguiente

Teorema 1.3 *Dados los puntos con coordenadas* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2)*, la distancia* d*, entre ellos está dada por*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.6}$$

Demostración: Considere los puntos A y B con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, como se muestran en la Figura (1.5).

Se traza por B una recta perpendicular al eje x y por A, se traza una recta perpendicular al eje y. Es evidente que el punto de intersección, C, de estas dos rectas trazadas tendrá las coordenadas (x_2, y_1). Así, los puntos A, B y C, son los vértices de un triángulo rectángulo, con ángulo recto en C. Por el teorema de Pitágoras

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2,$$

como

$$AC = x_2 - x_1, \text{y } CB = y_2 - y_1,$$

se tiene

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

■

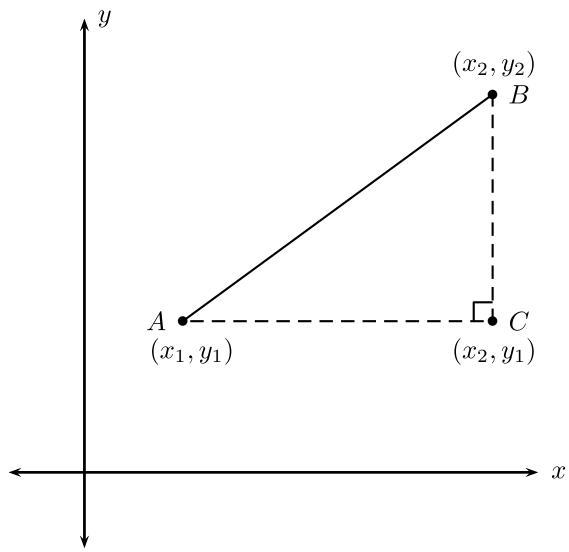

Figura 1.5 Distancia entre dos puntos; (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Los puntos A, B, C son los vértices de una triángulo rectángulo.

EJEMPLO 1.4

Usando el teorema (1.3), mostrar que los puntos $A,\ B$ y C con coordenadas $(1, 3)$, $(2, 1)$ y $(4, 2)$ respectivamente son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.

Solución: Un triángulo es isósceles si al menos dos de sus lados son iguales. Entonces, se deben calcular las distancias entre los tres vértices para determinar si es o no un triángulo isósceles.

$$\begin{aligned} AB =& \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}, \\ BC =& \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}, \\ CA =& \sqrt{(1-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}, \end{aligned}$$

puesto que $AB = BC$, entonces el triángulo ABC es isósceles. Ahora, para demostrar que el triángulo es rectángulo se usa el teorema de Pitágoras,

$$CA^2 = 10 = AB^2 + BC^2 = 5 + 5$$

donde el lado AC resulta ser la hipotenusa como se muestra en la Figura (1.6).

1.3.3. Pendiente de una recta

Al utilizar geometría analítica para modelar alguna situación, un concepto de gran utilidad es el de las rectas tangentes a las curvas y la inclinación de éstas respecto a un eje de referencia el cual usualmente es el eje x. Esta inclinación generalmente está asociada con *razones de cambio* o *variaciones* de una cantidad respecto de otra la cual se conoce también como *tasa de variación*.

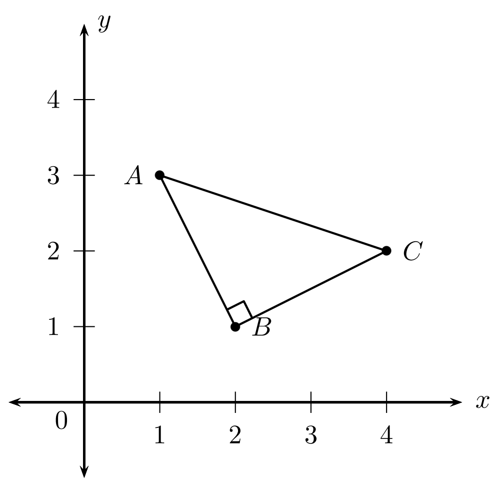

Figura 1.6 Triángulo ABC con vértices con coordenadas $A(1,3), B(2,1), C(4,2)$.

Definición 1.3.2 *Dada una recta l, su ángulo inclinación θ es el que forman la recta con la dirección positiva del eje de las x. Se mide a partir del eje x en sentido antihorario como se muestra en la Figura (1.7), donde*

$$0 \leq \theta < 180°.$$

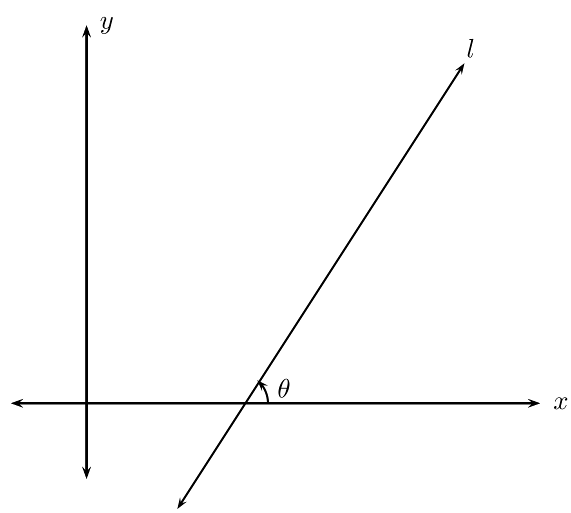

Figura 1.7 Ángulo de inclinación, θ, de una recta l.

De acuerdo con la definición (1.3.2), si la recta es paralela al eje x, su inclinación es cero. Si la recta es paralela al eje y (perpendicular al eje x) su inclinación es de $90°$.

Definición 1.3.3 *La* pendiente *m, de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación.*

$$m = \tan\theta \qquad (1.7)$$

Si θ es el ángulo de inclinación de una recta entonces para la pendiente m, se tiene

$i)$ si, $0 \leq \theta < 90°$, entonces $m \geq 0$,

$ii)$ si, $90° < \theta \leq 180°$, entonces $m \leq 0$,

$ii)$ puesto que $\tan 90°$ es indefinida, se adopta el convenio de que una recta perpendicular al eje x no tiene pendiente.

Teorema 1.4 *Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas de, cualesquiera dos puntos diferentes de una recta. La pendiente de la recta es*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.8}$$

Demostración: Considere dos puntos A y B de la recta l, con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente. Se trazan dos rectas; l_1 paralela al eje x que pasa por $A(x_1, y_1)$ y l_2 paralela al eje y y que pasa por $B(x_2, y_2)$ como se muestra en la Figura (1.8).

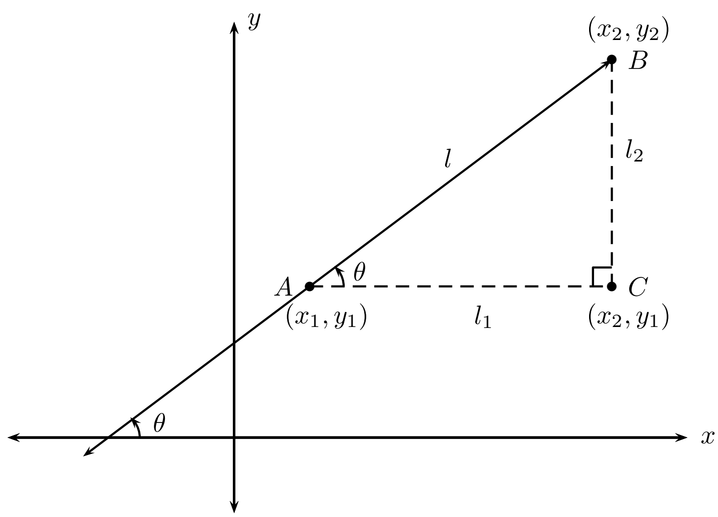

Figura 1.8 Cálculo de la pendiente de una recta dados dos puntos cualesquiera de la recta.

El punto de intersección de l_1 y l_2 es el punto C con coordenadas (x_2, y_1). Con esto, el triángulo ACB es rectángulo y por la definición de la pendiente tenemos

$$m = \tan\theta = \frac{CB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

■

De la ecuación (1.8) se puede inferir que, para una recta paralela al eje x se tiene $y_1 = y_2$; por lo que la pendiente será cero. Si ahora, la recta es perpendicular al eje x, entonces $x_1 = x_2$ y el cociente será indefinido por lo que no tendrá pendiente.

EJEMPLO 1.5

Considere el triángulo con vértices $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$ y $C(2, 5)$. Calcular sus ángulos internos.

Solución: En la Figura (1.9) se muestran los vértices del triángulo ABC. Para el ángu-

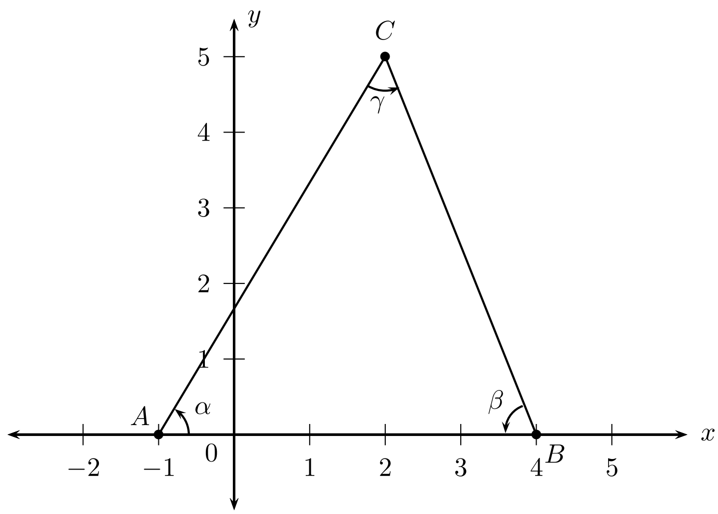

Figura 1.9 Ángulos internos α, β y γ del triángulos con vértices $A(-1,0)$, $B(4,0)$ y $C(2,5)$.

lo interno α, se calcula la pendiente de $\overrightarrow{AC}$

$$m_{AC} = \frac{5-0}{2+1} = \frac{5}{3},$$

por lo que $\alpha = \tan^{-1}(5/3) = 59^{\circ}\!.04$.

Para el ángulo interno β, calcula se la pendiente de $\overrightarrow{BC}$

$$m_{BC} = \frac{5-0}{2-4} = \frac{-5}{2},$$

por lo que

$$\beta = 180^{\circ} - \tan^{-1}(-5/2) = 180 - 111^{\circ}\!.80 = 68^{\circ}\!.20.$$

Así, $\gamma = 180^{\circ} - 59^{\circ}\!.04 - 68^{\circ}\!.20 = 52^{\circ}\!.76$.

EJERCICIOS

1.1 Calcule el perímetro del triángulo del ejemplo (1.5).

1.2 Un triángulo equilátero, de lado $2l$, tiene un vértice en el origen y un lado sobre el eje de las abscisas en la dirección positiva. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

1.3 Determine las coordenadas del punto que equidiste de los puntos $A(-3,-1)$, $B(3,3)$ y $C(2,4)$.

1.4 Calcule el perímetro del cuadrilátero con vértices $A(-2,3),\ B(-3,-2),\ C(2,-3)$ y $D(3,2)$.

1.5 Las coordenadas del punto medio de $\overrightarrow{AB}$ son $(-2,-3)$. Si las coordenadas del punto A son $(2,3)$, hallar las coordenadas del punto B.

1.6 Sean $A(6,5)$ y $B(-1,-1)$ puntos de un segmento de recta. Calcular la abscisa del punto P que divide al segmento $\overrightarrow{AB}$ en la razón $3/2$.

1.7 Hallar las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 tales que dividan al segmento que une $A(20,-5)$ con $B(-10,5)$ en tres partes iguales.

1.8 Para el triángulo con vértices $A(2,3)$, $B(-2,7)$ y $C(2,-5)$ si F es el punto medio del lado AB, hallar las coordenadas del punto P tal que divide al segmento $\overrightarrow{CF}$ en la razón $2/1$.

1.9 Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(-2,6)$.

PROBLEMAS

1.1 Un triángulo equilátero, de lado $2l$, tiene su centro en el origen. Hallar las coordenadas de los tres vértices.

1.2 Demuestre que los puntos A, B y C, con coordenadas $(0,-5), (1,-3)$ y $(3,1)$ respectivamente, son colineales.

1.3 Demuestre que los puntos $(3,3), (-3,-3)$ y $(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero.

1.4 Demuestre que los puntos $(3,3)$, $(-2,2)$ y $(2,-2)$ son vértices de un triángulo isósceles.

1.5 Demuestre que los puntos $(7,5)$, $(2,3)$ y $(6,-7)$, son los vértices de un triángulo rectángulo. Calcule su área y señale en cuál de los vértices se encuentra el ángulo recto.

1.6 Encuentre los ángulos internos del triángulo con vértices: $A(-3,0), B(4,0)$ y $C(1,1)$.

1.7 Encuentre la ecuación de todos los puntos que equidistan 3 unidades del origen.

1.8 Encuentre la ecuación de todos los puntos que equidistan r unidades del punto $C(h,k)$.

1.9 El punto $A(-3,-1)$ es el extremo de un diámetro de la circunferencia con centro en $(0,1)$ y radio $\sqrt{13}$. Hallar las coordenadas del otro extremo del diámetro.

1.10 El *baricentro* es el punto de corte de las medianas de un triángulo y se encuentra a $2/3$ de la distancia de cada vértice al punto medio del lado opuesto. Considere un triángulo con coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y (x_3, y_3). Demuestre que las coordenadas del baricentro, (x_B, y_B) están dadas por

$$x_B = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$
$$y_B = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

1.11 Demostrar que los segmentos que unen los puntos medios de un cuadrilátero forman un paralelogramo.

CAPÍTULO 2

LA LÍNEA RECTA

2.1. Introducción

La recta, junto con el punto, son conceptos fundamentales en geometría euclidiana que se aceptan como postulados. Sin embargo, en geometría analítica se puede tener una definición de la recta en términos de un lugar geométrico. Este capítulo está dedicado a obtener la ecuación de la línea recta cuando se conocen propiedades geométricas de la recta: dos puntos por los que la recta pasa, un punto y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje de las abscisas o cuando se conocen los puntos de corte de la recta con los ejes coordenados. Las diferentes formas de la ecuación de la recta son de gran utilidad en las áreas de ciencias e ingeniería ya que suelen ser usadas como modelos matemáticos en diversas situaciones.

Definición 2.1.1 *Una recta l, es el conjunto de todos los puntos del lugar geométrico que satisfacen que, dados dos puntos diferentes $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de l, se tiene que la pendiente dada por*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

es siempre constante.

Así, si un punto satisface la ecuación de la recta entonces el punto pertenece a la recta. Recíprocamente, si un punto pertenece a la recta entonces las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la recta.

2.2. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Una vez que se cuenta con una definición analítica de la ecuación de la recta es posible encontrar las ecuaciones de rectas, dadas dos condiciones independientes. Como punto de inicio, se obtendrá la ecuación de la recta que pasa por dos puntos diferentes. Considere dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en el plano cartesiano como se muestra en la Figura (2.1).

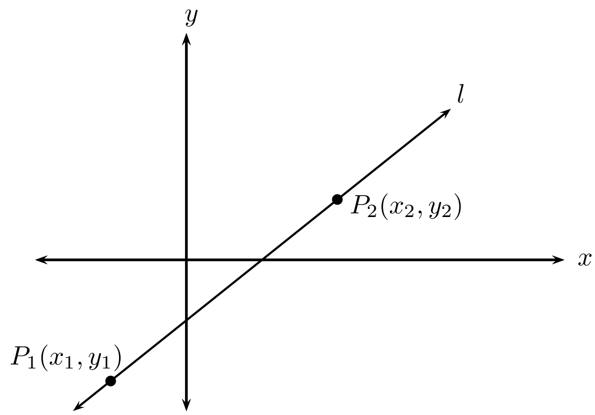

Figura 2.1 Gráfica de la recta l que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

Para esta recta, su pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sea (x, y) un punto cualquiera de la recta, por la definición (2.1.1), se tiene

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

de donde,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{2.1}$$

La ecuación (2.1) corresponde a la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Se puede notar que un resultado equivalente se obtiene si se toma el punto (x_2, y_2). En este caso

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

EJEMPLO 2.1

Los puntos $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ y $C(2, 2)$, son los vértices de un triángulo isósceles. Hallar la ecuación de la recta que pasa por vértice A y por el punto medio del lado opuesto a este vértice.

Solución: en la Figura (2.2), se muestran los vértices del triángulo isósceles y la recta que pasa por el vértice A y el punto medio del lado opuesto (línea segmentada). El lado opuesto al vértice A, tiene como extremos los vértices C y B. Así, el punto

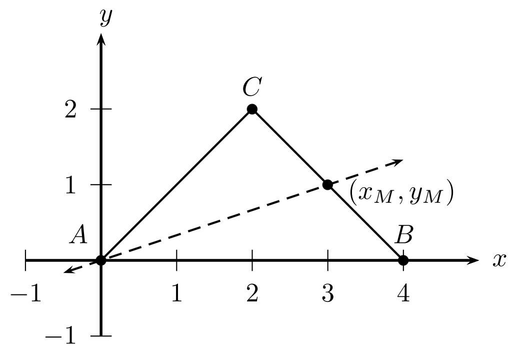

Figura 2.2 Triángulo isósceles con vértices A, B y C. La línea segmentada pasa por el vértice A y el punto medio (x_M, y_M), del lado opuesto.

medio (x_M, y_M) tiene coordenadas

$$x_M = \frac{2+4}{2} = 3$$
$$y_M = \frac{2+0}{2} = 1$$

Puesto que la recta pasa por este punto medio $(3, 1)$ y por el punto $A(0, 0)$, la ecuación de la recta es

$$y - 0 = \frac{1-0}{3-0}(x-0) \quad \text{ó}$$
$$y = \frac{1}{3}x$$

Regresando a la ecuación (2.1), si por ejemplo $(x_1, y_1) = (0, 0)$, es decir, si la recta pasa por el origen entonces se tiene

$$y = \frac{y_2}{x_2}x.$$

Así, como consecuencia inmediata se tiene que la ecuación de cualquier recta que pasa por el origen está dada por

$$y = mx. \tag{2.2}$$

donde la pendiente de la recta se puede determinar con cualquier punto (x_2, y_2), diferente del punto $(0, 0)$, como; $m = y_2/x_2$.

Cuando la recta no pasa por el origen y no es paralela con alguno de los ejes coordenados entonces la recta corta a los ejes coordenados. Sean $(a, 0)$ y $(0, b)$ los punto puntos de intersección con los ejes x, y, respectivamente. Usando la ecuación (2.1) y el punto de corte $(a, 0)$ con el eje x como el punto (x_1, y_1) se tiene

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) = \frac{-b}{a}(x-a).$$

Multiplicando ambos lados con a y transponiendo el término $-bx$,

$$bx + ay = ab,$$

dividiendo con ab se obtiene,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2.3}$$

La ecuación (2.3) se conoce como la *ecuación simétrica* de la recta.

EJEMPLO 2.2

Calcular el área del triángulo rectángulo que se forma con los ejes coordenados en el primer cuadrante y la recta

$$y = 4 - 4x/3.$$

Solución: Transponiendo el término $-4x/3$ se tiene

$$y + \frac{4}{3}x = 4.$$

Dividiendo con 4, para tener la forma simétrica

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$$

Así, los puntos de corte con los ejes son $(3, 0)$ y el $(0, 4)$ como se muestra en la Figura (2.3). Por tanto, las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo son 3 y 4. Por lo que su área A, es

$$A = \frac{3 \times 4}{2} = 6.$$

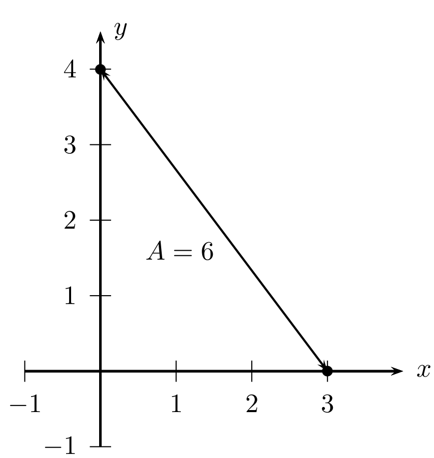

Figura 2.3 Triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados en el primer cuadrante y la recta $y = 4 - 4x/3$.

2.3. Ecuación de la recta dado un punto y su pendiente

Cuando se conocen el ángulo θ que forma la recta con la dirección positiva del eje x y un punto (x_1, y_1) por el que pasa la recta, estas dos condiciones independientes son suficientes para determinar la ecuación de la recta. Puesto que la pendiente de la recta está dada como $m = \tan\theta$, entonces la ecuación de una recta conociendo su pendiente y un punto por el que pasa está dada por

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

donde (x, y) es un punto cualquiera de la recta. Multiplicando con $(x - x_1)$, se tiene

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) es conocida como la *ecuación punto-pendiente* de la recta.

EJEMPLO 2.3

Hallar la ecuación de la recta con pendiente $m = -2/3$ y que pasa por el punto $(2, 3)$.
Solución: De acuerdo con la ecuación (2.4)

$$y - 3 = \frac{-2}{3}(x - 2)$$

simplificando

$$3y + 2x = 13.$$

Un caso particular de la ecuación (2.4) ocurre cuando el punto (x_1, y_1), se encuentra sobre el eje y. En este caso se tiene $(0, b)$, de donde

$$y - b = m(x - 0)$$

reescribiendo,

$$y = mx + b \tag{2.5}$$

la ecuación (2.5), se conoce como la *ecuación de la recta con pendiente* m *y ordenada en el origen* b.

EJEMPLO 2.4

Hallar la ecuación de la recta que forma un ángulo de 30° con la dirección positiva del eje y que pasa por el punto $(0, -5)$.
Solución: Puesto que el ángulo de inclinación de la recta es $\theta = 30°$ entonces su pendiente es

$$m = \tan\theta = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por tanto, la ecuación de la recta es

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 5.$$

2.4. Ecuación normal de la recta

Como se ha visto, para determinar la ecuación de una recta se requieren dos condiciones independientes. Una forma para determinar la ecuación de una recta, que no pasa por el origen y que corta a ambos ejes coordenados, se obtiene conociendo la magnitud de la longitud del segmento que va del origen perpendicularmente a la recta: *la distancia de la recta al origen*. La segunda condición, es conocer el ángulo que forma el segmento que va perpendicularmente del origen a la recta con la dirección positiva del eje x. La forma de la ecuación normal está dada en el siguiente

Teorema 2.1 *Sea l una recta que no pasa por el origen y que corta a ambos ejes coordenados. Considere el segmento de recta $\overrightarrow{OC}$ que va del origen, perpendicularmente a la recta formando un ángulo α con la dirección positiva del eje x y sea d la magnitud de su longitud. Entonces la ecuación de la recta es*

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = d.$$

Demostración: Puesto que l corta a los ejes coordenados en los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$,

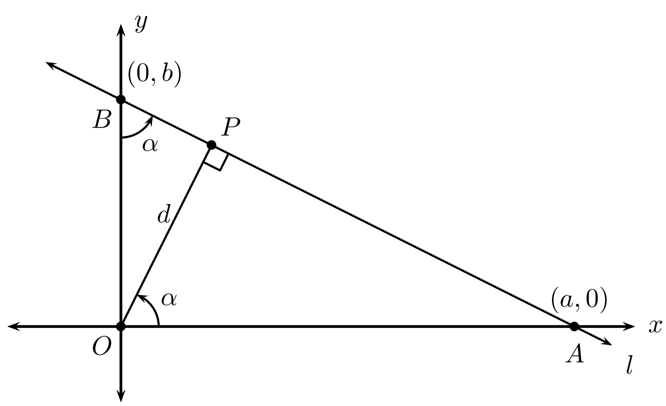

Figura 2.4 Grafica de una recta l que corta a los ejes coordenados en los puntos $A(a, 0)$ y $B(0, b)$, d es la longitud del segmento que va del origen perpendicularmente a la recta.

la ecuación de la recta se puede escribir en la forma simétrica

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

En el triángulo OPA, a se puede expresar en términos de d y α como

$$a = \frac{d}{\cos \alpha}.$$

Análogamente para el triángulo OPB se tiene

$$b = \frac{d}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Sustituyendo las expresiones de a y b en la forma simétrica de la recta

$$\frac{x}{(d/\cos\alpha)}+\frac{y}{(d/\operatorname{sen}\alpha)}=\frac{x\cos\alpha}{d}+\frac{y\operatorname{sen}\alpha}{d}=1,$$

por lo que

$$x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha=d. \tag{2.6}$$

■

Con las expresiones para el ángulo α y la distancia d, en términos de a y b se tiene

$$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1=\frac{d^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}=d^2\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right).$$

De donde

$$d=\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{2.7}$$

Para el ángulo α

$$\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{(d/b)}{(d/a)},$$

de donde

$$\alpha=\tan^{-1}(a/b) \tag{2.8}$$

EJEMPLO 2.5

Encuentre la forma normal de la ecuación de la recta l dada por

$$y=\frac{3}{2}x+3.$$

Solucion: Primero se expresa la ecuación en su forma simétrica

$$\frac{y}{3}-\frac{x}{2}=1.$$

Así, las coordenadas de las intercepciones de la recta los ejes coordenados son $A(-2,0)$ y $B(0,3)$. Usando las ecuaciones (2.7) y (2.8)

$$\begin{aligned}\alpha &=\tan^{-1}(a/b)=\tan^{-1}(-2/3)=146.31,\\ d &=\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|(-2)3|}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{13}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación normal es

$$x\cos(146.31)+y\operatorname{sen}(146.31)=\frac{6}{\sqrt{13}}.$$

2.5. Ángulo entre dos rectas

Dadas dos rectas en un mismo plano, éstas se cortan o son paralelas. En caso que las rectas se corten, se forman dos pares de ángulos iguales como se muestra en la Figura (2.5). Conociendo las ecuaciones de las rectas se tienen las pendientes de ambas, por lo que es posible determinar los ángulos que se forman.

Considere dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2 que se cortan en un punto P formando cuatro ángulos (los cuales son iguales dos a dos por ser opuestos por el vértice) como se muestra en la Figura (2.5). Los ángulos α y β son ángulos suplementarios. Sean θ_1 y θ_2 los ángulos de inclinación de l_1 y l_2 respectivamente. El objetivo será encontrar una expresión para calcular el ángulo α, medido en sentido antihorario, en términos de los ángulos de inclinación de las rectas.

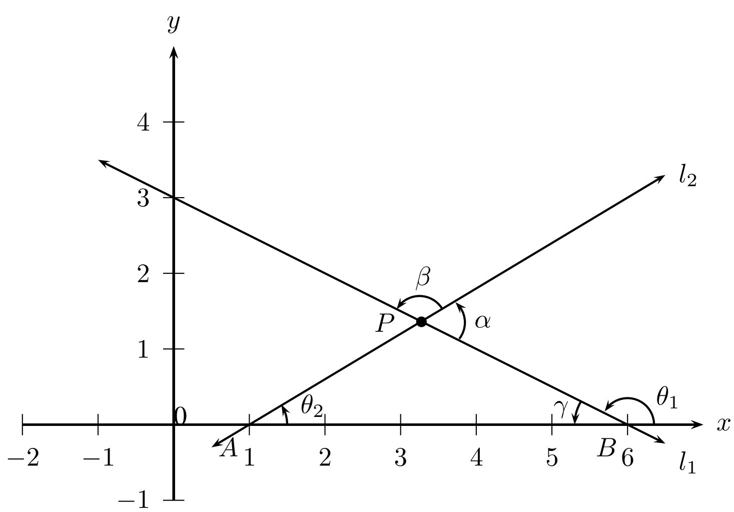

Figura 2.5 Cálculo del ángulo α que se forma entre dos rectas l_1 y l_2.

Puesto que los ángulos γ y θ_1 son suplementarios, entonces

$$\gamma = 180^\circ - \theta_1.$$

En la Figura (2.5) el ángulo α es externo al triángulo ABP por lo que,

$$\alpha = \gamma + \theta_2 = 180^\circ + \theta_2 - \theta_1 = 180^\circ + \Delta\theta,$$

donde

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Así,

$$\tan\alpha = \tan(180^\circ + \Delta\theta) = \tan\Delta\theta =$$

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1}$$

En términos de las pendientes,

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}, \quad m_2 m_1 \neq -1. \tag{2.9}$$

En la deducción de la ecuación (2.9), debemos tomar en cuenta que

$i)$ el ángulo α se mide en sentido antihorario y

$ii)$ la pendiente m_1, es la pendiente de la recta a partir de la cual se empieza a medir el ángulo y la pendiente m_2 es la pendiente de la recta del lado final del ángulo.

EJEMPLO 2.6

Calcular el ángulo del vértice C del triángulo con vértices $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(3,3)$.
Solución: Puesto que el ángulo se mide del lado AC al BC, se tomará como recta inicial (l_1) la que pasa por los vértices A y C y como recta final (l_2) la que pasa por los vértices B y C como se muestra en la Figura (2.6). Las respectivas pendientes están

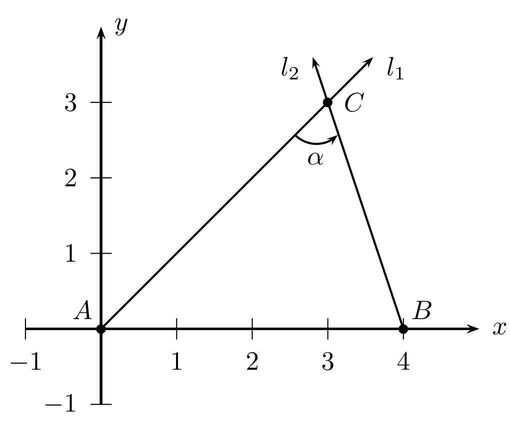

Figura 2.6 Cálculo del ángulo α del vértice C.

dadas por

$$\begin{aligned} l_1 : m_1 &= \frac{3-0}{3-0} = 1 \\ l_2 : m_2 &= \frac{3-0}{3-4} = -3. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-3-1}{1+(1)(-3)}\right) = \tan^{-1}(2) = 63.^{\circ}45.$$

Dos rectas son paralelas si el ángulo α que forman es $0°$ ó $180°$. Puesto que en ambos casos la tangente es cero

$$\tan 0° = \tan 180° = 0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \tag{2.10}$$

para que el lado derecho de la ecuación (2.10) sea cero se requiere $m_1 = m_2$. Así, dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. Recíprocamente, si sus pendientes son iguales, $m_1 = m_2$ entonces

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right) = \tan^{-1}(0) = 0° \text{ ó } 180°,$$

por lo que las rectas serán paralelas.

Si dos rectas son perpendiculares el ángulo que forman es de $90°$. Puesto que $\tan 90°$ no existe, no es posible usar la ecuación (2.9) para encontrar una condición en términos de las pendientes. Por esto, se tomarán los recíprocos de la ecuación (2.9)

$$\cot\alpha = \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1}, \quad m_2 \neq m_1.$$

Así, para $\alpha = 90°$,

$$\cot 90° = 0 = \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1}. \tag{2.11}$$

El lado derecho de la ecuación (2.11) será cero si $m_2 m_1 = -1$. Recíprocamente, si $m_2 m_1 = -1$ entonces

$$\alpha = \cot^{-1}\left(\frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1}\right) = \cot^{-1}(0) = 90° \text{ ó } 270°.$$

Las condiciones de paralelismo y perpendicularidad para dos rectas en el plano en términos de sus pendientes quedan establecidas en siguiente

Teorema 2.2 *Sean l_1 y l_2 dos rectas en el plano con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Entonces*

$i)$ *l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.*

$i)$ *l_1 y l_2 son perpendiculares si y sólo si $m_2 m_1 = -1$.*

EJEMPLO 2.7

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 5)$ y es paralela a la recta $3y + 2x - 5 = 0$.

Solución: Puesto que ambas rectas son paralelas entonces sus pendientes son iguales. Reescribiendo la ecuación de la recta dada

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

La pendiente es $m = -2/3$ y usando el punto $(-1, 5)$ se tiene

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x + 1).$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es $3y + 2x - 13 = 0$.

EJEMPLO 2.8

Calcular la mediatriz del segmento delimitado por $A(1, 2)$ y $B(5, 4)$.

Solución: La mediatriz de un segmento, es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Así, calculando las coordenadas (x_M, y_M) del punto medio

$$x_M = \frac{1+5}{2} = 3, \;\; y_M = \frac{2+4}{2} = 3.$$

La pendiente m, del segmento AB es

$$m = \frac{4-2}{5-1} = \frac{1}{2}$$

Puesto que la mediatriz es perpendicular al segmento AB, entonces la pendiente de la mediatriz m_M es el recíproco negativo de m. Así, la pendiente m_M es

$$m_M = -\frac{1}{m} = -2.$$

Usando la forma punto pendiente de la recta con $(3, 3)$ y $m_M = -2$, la mediatriz tiene por ecuación: $y + 2x - 9 = 0$.

2.6. Ecuación general de primer grado con dos variables

Definición 2.6.1 *La ecuación general de primer grado con dos variables está dada por*

$$ax + by + c = 0, \tag{2.12}$$

donde a y b, no son cero simultáneamente.

En caso de que a ó b sean cero, la ecuación (2.12) representará rectas paralelas a los ejes coordenados. Así, si $a = 0$ entonces $b \neq 0$, por lo que dividiendo la ecuación (2.12) con b se tiene

$$y = -\frac{c}{b}, \tag{2.13}$$

que representa la ecuación de una recta paralela al eje x.

Si ahora, $b = 0$ entonces $a \neq 0$ por lo que al dividir la ecuación (2.12) con a se tiene

$$x = -\frac{c}{a}, \tag{2.14}$$

y representa la ecuación de una recta paralela al eje y.

Suponiendo ahora $b \neq 0$, la ecuación (2.12) se puede reescribir como

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \tag{2.15}$$

la cual representa una recta con pendiente, $m = -a/b$ y ordenada en el origen $-c/b$. La ecuación (2.12) se conoce como *forma general* de la ecuación de la recta.

Aunque la (2.12) presenta tres cantidades para estar completamente determinada, puesto que a ó b deben ser diferente de cero, en la práctica sólo se requieren determinar dos cantidades. Por ejemplo, la ecuación (2.15) resulto de considerar $b \neq 0$. Renombrando las constantes $m = -a/b$ y $k = -c/b$ se tiene

$$y = mx + k,$$

Un resultado similar se obtiene si $a \neq 0$ y permite establecer el siguiente

Teorema 2.3 *La ecuación general de primer grado con dos variables representa una recta. Recíprocamente, toda ecuación de una recta se puede escribir como una ecuación general de primer grado con dos variables.*

EJEMPLO 2.9

Dada la ecuación de primer grado con dos variables

$$3y - 11x - 1 = 0.$$

Encontrar su pendiente y su ordenada al origen.
Solución: Despejando y

$$y = \frac{11}{3}x + \frac{1}{3}.$$

La cual representa una recta con pendiente $m = 11/3$ y ordenada en el origen de $1/3$.

2.6.1. Rectas que se cortan

En la sección (2.5), se encontró la forma de determinar los ángulos que se forman cuando se cortan un par de rectas en el plano. Adicional a la determinación de los ángulos, es de interés conocer las coordenadas del punto de corte. Puesto que la ecuación de una recta se puede escribir en su forma general, encontrar las coordenadas del punto de corte equivale a resolver un *sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Existen varios métodos para resolver estos sistemas de ecuaciones: algebraicos, por matrices y determinantes entre otros. Los métodos algebraicos (Ver Apéndice A) tienen como objetivo reducir el sistema de dos ecuaciones con dos variables en una ecuación con una variable. Se encuentra el valor de la variable y se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables de la forma

$$ax + by = c \tag{e1}$$

$$dx + ey = f \tag{e2}$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes y se tiene que: a y b no son cero simultáneamente y similarmente, d y e no son ambas cero. Resolver el sistema implica encontrar el punto (x_1, y_1) que satisface ambas ecuaciones. Sin embargo, dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se tienen los siguientes casos

$i)$ las rectas se cortan en un sólo punto (tienen pendientes diferentes),

$ii)$ las rectas son paralelas (tienen la misma pendiente), no se cortan y

$iii)$ las ecuaciones $(e1)$ y $(e2)$, representan la misma recta.

EJEMPLO 2.10

Dadas las rectas

$$\begin{aligned} 2y - 3x + 5 &= 0 \\ 4y + x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

determine si se cortan. En caso afirmativo encontrar las coordenadas del punto de corte.
*Solución:*En ambas ecuaciones los coeficientes de la variable y, son diferentes de cero. Así, el sistema se puede escribir como

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \ \rightarrow (e1) \\ y &= -\frac{1}{4}x - 2 \ \rightarrow (e2) \end{aligned}$$

Las pendientes de $(e1)$ y $(e2)$ son $m_1 = 3/2$ y $m_2 = -1/4$, respectivamente. Puesto que $m_1 \neq m_2$, entonces las rectas se cortan en un punto (x_1, y_1). Resolviendo el sistema por igualación (ver Apéndice A)

$$\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x - 2,$$

así, $x = 2/7$. Sustituyendo en $(e1)$

$$y = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}\right) - \frac{5}{2} = -\frac{29}{14}.$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de corte son $(x_1, y_1) = (2/7, -29/14)$.

2.7. Traslación de ejes

Considerare al punto (h, k) como origen O' del sistema de coordenadas (x', y'), donde los ejes x', y' son paralelos a los ejes x, y, respectivamente como se muestra en la Figura (2.7). Un punto (x_1, y_1) está relacionado con las coordenadas (x_1', y_1') por

$$x_1 = x_1' + h, \ x_1' = x_1 - h \tag{2.16}$$
$$y_1 = y_1' + k, \ y_1' = y_1 - k. \tag{2.17}$$

Para una recta l dada por la ecuación general se tiene

$$ax + by + c = a(x' + h) + b(y' + k) + c = ax' + by' + (ah + bk + c) = 0$$

Así, la pendiente de la recta l en ambos sistemas de coordenadas es la misma.

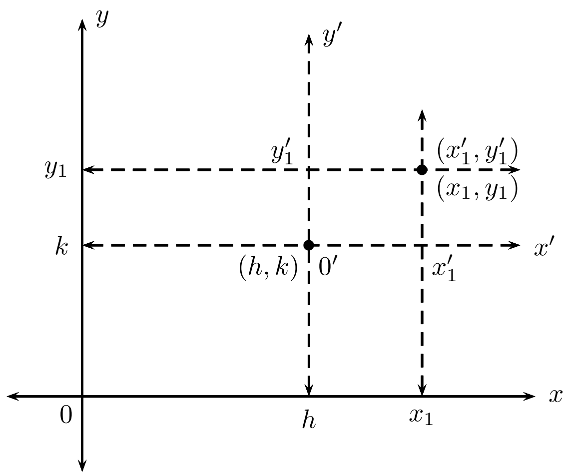

Figura 2.7 Sistema coordenado (x', y'), con ejes paralelos a los ejes (x, y). El origen $0'$ está en las coordenadas (h, k) del sistema coordenado (x, y).

2.8. Distancia de un punto a una recta.

En el plano, la distancia más corta de un punto $P(x_0, y_0)$ a una recta l es la magnitud de la longitud el segmento de recta que va perpendicularmente desde el punto a la recta. Si l es paralela a alguno de los ejes, entonces la distancia es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas correspondientes al eje no paralelo a la recta. Si l pasa por el origen entonces, con la pendiente m y el punto P, se encuentra la recta $l_{\|}$ paralela a l y que pasa por P como se muestra en la Figura (2.8). Considere la ecuación punto pendiente de la

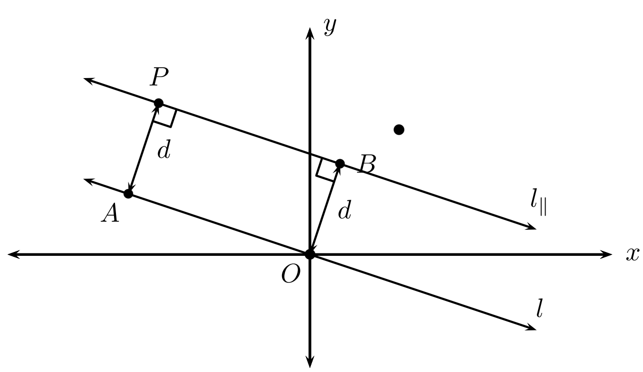

Figura 2.8 Distancia d de un punto $P(x_0, y_0)$ a una recta l que pasa por el origen.

recta

$$y = mx + b.$$

Así, de acuerdo con la ecuación (2.7) la distancia se puede calcular como (ver problema 2.9)

$$d = \frac{|y_0 - mx_o|}{\sqrt{1+m^2}}. \tag{2.18}$$

Considere una recta que no pase por el origen y que no sea paralela con alguno de los ejes coordenados. La ecuación general de la recta es

$$Ax + By + C = 0, \text{ con } A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0 \tag{2.19}$$

Escribiendo esta ecuación en la forma normal

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

De acuerdo con la ecuación (2.7) la distancia de recta al origen es

$$d = \frac{|(-C/A)(-C/B)|}{\sqrt{(-C/A)^2 + (-C/B)^2}} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Este resultado permite establecer el siguiente

Teorema 2.4 *La distancia d, del punto (h,k) a la recta l dada por*

$$Ax + By + C = 0$$

está dada por

$$d = \frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{2.20}$$

Demostración: Considerare al punto (h,k) como origen del sistema de coordenadas (x', y'). Usando las ecuaciones, que relacionan ambos sistemas de coordenadas, obtenidas en la sección (2.7) se tiene

$$Ax + By + C = A(x'+h) + B(y'+k) + C = Ax' + By' + (Ah + Bk + C) = 0$$

Haciendo $C' = Ah + Bk + C$, el problema se transforma en obtener la distancia de la recta

$$Ax' + By' + C' = 0,$$

al origen O'. Así

$$d = \frac{|C'|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ah+Bk+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

■

EJEMPLO 2.11

Calcular la distancia entre las rectas paralelas

$$l_1 : 2x + 3y - 5 = 0$$
$$l_2 : 2x + 3y + 1 = 0$$

Solución: Por los coeficientes de x, y en ambas rectas resultan ser paralelas. Así, se toma un punto que pertenece a l_1: $(1, 1)$, por lo que la distancia del punto a l_2 es

$$d = \frac{|2(1) + 3(1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{2}}.$$

EJERCICIOS

2.1 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(0, -1)$.

2.2 Una recta pasa por el punto $(-2, 5)$ y forma una ángulo de $45°$ con el eje y en la dirección positiva. Hallar su ecuación.

2.3 Hallar el perímetro del cuadrilátero con vértices $A(-3, -4)$, $B(-5, 3)$, $C(3, 3)$ y $D(5, -4)$.

2.4 Una recta que pasa por el punto $A(3, 2)$ tiene pendiente $3/4$. Si la abscisa de un punto sobre esta recta es 7, hallar su ordenada.

2.5 Hallar los ángulos interiores del triángulo delimitado por las rectas

$$\begin{aligned} y - x + 2 &= 0, \\ y + 2x - 7 &= 0, \\ y + 4x - 46 &= 0. \end{aligned}$$

2.6 Calcular el ángulo del vértice C del triángulo en el ejemplo (2.1).

2.7 Hallar la ecuación de la recta con pendiente $m = -\sqrt{3}$ y que está a una distancia $d = 3$, del origen (dos respuestas).

2.8 Las rectas l_1 y l_2 se cortan y forman un ángulo de $\pi/3$. Si la pendiente de l_2 es $\sqrt{2}$, calcule el valor de la pendiente de l_1.

2.9 Hallar los ángulos interiores del triángulo con vértices $A(5, 1)$, $B(3, 3)$ y $C(-3, -2)$.

2.10 Hallar la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(-2, 5)$ y $B(3, -5)$.

PROBLEMAS

2.1 Demuestre que el punto $(3,3)$ pertenece a la recta que pasa por los puntos $(7,0)$ y $(1/3,5)$.

2.2 Los puntos $(a,0)$ y $(0,a)$ son los vértices de un triángulo equilátero. Encuentre las coordenadas del tercer vértice (dos soluciones).

2.3 Considere los puntos $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(-2,0)$ y $D(0,-2)$. Demuestre que estos puntos son los vértices de un paralelogramo.

2.4 Dados los puntos $A(a,1)$ y $B(2,3)$, encuentre el valor de a para que la recta que pasa por los puntos A y B sea paralela a la recta $4y-5x+3=0$.

2.5 Demuestre que las diagonales de cualquier paralelogramo se bisecan entre sí. *Sugerencia: considere un lado del paralelogramo sobre del eje de las x, iniciando en el origen.*

2.6 Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de sus vértices.

2.7 Hallar un punto sobre la recta $x+y+1=0$, tal que la abscisa sea el doble que la ordenada.

2.8 La pendiente de la recta que que pasa por el punto $A(2,3)$ es 2. Encuentre dos puntos que estén a 5 unidades del punto A.

2.9 Demuestre que la distancia de un punto (x_0,y_0) a una recta l que pasa por el origen, está dada por

$$d=\frac{|y_0-mx_o|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

2.10 Considere el cuadrilátero con vértices $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(-2,0)$ y $D(0,-2)$. Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de sus lados forman un paralelogramo.

CAPÍTULO 3

ECUACIÓN DE LUGAR GEOMÉTRICO Y GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN

3.1. Ecuación de un lugar geométrico

Obtener la ecuación de un *lugar geométrico* hace a la geometría analítica una de las áreas más importantes de las matemáticas. En muchas ocasiones, la ecuación del lugar geométrico es usada como un modelo matemático lo que facilita el análisis e interpretación de resultados.

Definición 3.1.1 *Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen condiciones geométricas establecidas para su pertenencia.*

El lugar geométrico en el plano se conoce también como *grafica* o *curva*. A partir de la definición de un lugar geométrico se pueden dar una serie de pasos para encontrar su ecuación, dadas las características del mismo.

$i)$ En el sistema de coordenadas hacer un bosquejo de las condiciones geométricas y ubicar los puntos que se proporciones, si es que los hay.

$ii)$ Nombre $P(x, y)$ a un punto del lugar geométrico que cumple con las condiciones proporcionadas y establecer relaciones entre los elementos del bosquejo; generalmente son condiciones en cuanto a distancia, ángulos y pendientes.

$iii)$ Usar las relaciones encontradas para hallar la ecuación del lugar geométrico.

$iv)$ Comprobar que la ecuación hallada para describir el lugar geométrico, cumple con las condiciones establecidas.

EJEMPLO 3.1

Encuentre la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que equidistan 3 unidades del origen.
Solución: Sea $P(x, y)$ un punto qe pertenece al lugar geométrico. Por la condición geométrica establecida, la distancia de P al origen es 5, como se muestra en la Figura (3.1). En este caso la condición geométrica es referente a distancia. Así,

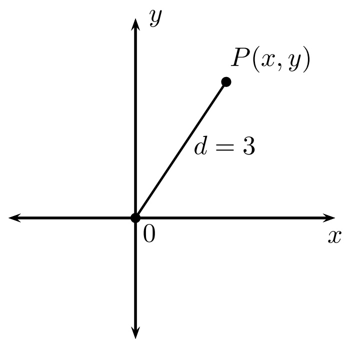

Figura 3.1 Punto $P(x, y)$ a 3 unidades de distancia del origen.

$$3 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado, la ecuación del lugar geométrico es

$$x^2 + y^2 = 9.$$

La gráfica se muestra en la Figura (3.2)

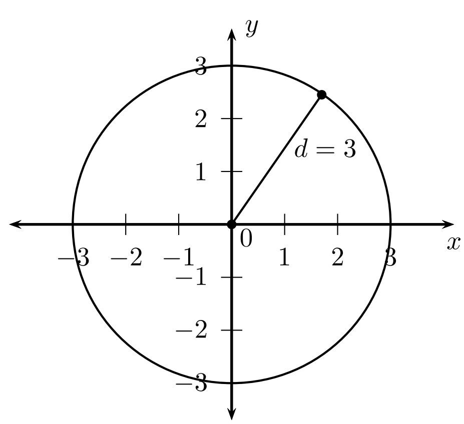

Figura 3.2 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 3$.

EJEMPLO 3.2

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que equidistan del punto $F(1,-5)$ y de la recta $l:\ y+1=0$.
Solución: Sea $P(x,y)$ un punto que pertenece al lugar geométrico como se muestra en la Figura (3.3).

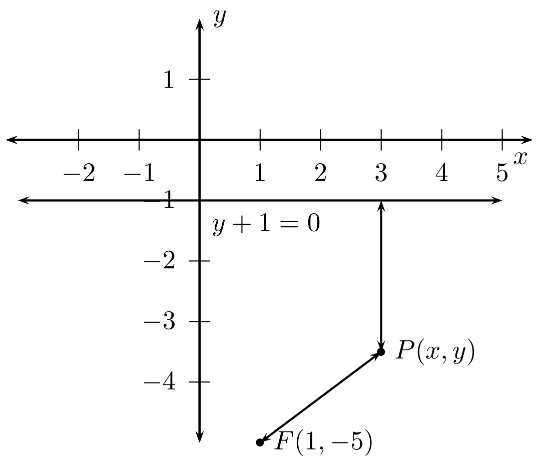

Figura 3.3 Punto $P(x,y)$ equidistante del punto $F(1,-5)$ y de la recta $l:\ y+1=0$.

La distancias de P a F (d_{PF}) y de P a la recta l (d_{Pl}) son

$$\begin{aligned} d_{PF} &= \sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}, \\ d_{Pl} &= |y+1|\,, \end{aligned}$$

respectivamente. Igualando ambas distancias y elevando al cuadrado

$$(x-1)^2+(y+5)^2=(y+1)^2.$$

Simplificando

$$(x-1)^2=-8(y+3).$$

El la Figura (3.4) se muestra la gráfica del lugar geométrico.

3.2. Gráfica de una ecuación

La gráfica de una ecuación es una forma útil de analizarla visualmente. Dada una ecuación de las variables x, y no siempre es posible escribir explícitamente una de las variables en términos de la otra. Sin embargo, dada una ecuación de las dos variables siempre es posible escribirla como una igualdad a cero,

$$f(x,y)=0. \tag{3.1}$$

En esta sección se aborda el problema inverso: dada una ecuación construir su gráfica.

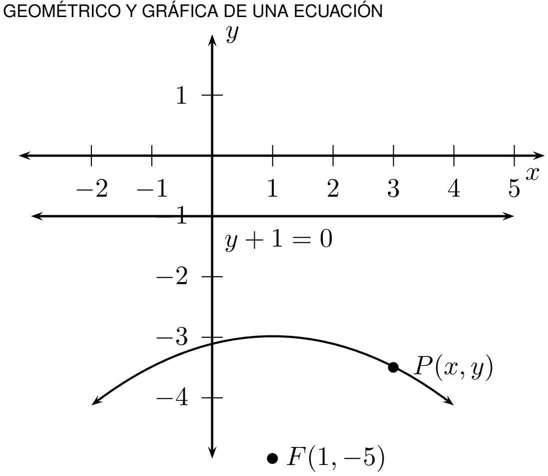

Figura 3.4 Gráfica del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ equidistante del punto $F(1,-5)$ y de la recta $l:\ y+1=0$.

Definición 3.2.1 *Dada una ecuación $f(x,y)=0$, su gráfica G_f, es el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación;*

$$G_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\right\}$$

Se debe tener en cuenta que no todas las ecuaciones tiene gráfica en el Plano ($\mathbb{R}^2$), es decir, existen ecuaciones tales que $G_f=\emptyset$. Por ejemplo la grafica de la ecuación

$$x^2+y^2+4=0$$

es $G_f=\emptyset$.

De acuerdo con la definición (3.2.1), cualquier punto (x,y) tal que $f(x,y)=0$, pertenece a la gráfica de la ecuación. Recíprocamente, si el punto pertenece a la gráfica entonces satisface la ecuación.

EJEMPLO 3.3

Elaborar la gráfica de la ecuación $x+2y=4$.
Solución: La ecuación es de una recta. Por tanto para el trazo de su gráfica se requieren dos puntos cualesquiera de la recta. Escribiendo la ecuación en su forma simétrica

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1.$$

Con esto, los cortes con los ejes son: $(4,0)$ y $(0,2)$.

Si bien la gráfica de una recta requiere sólo de dos puntos, para otros lugares geométricos diferentes a la recta obtener la gráfica no es simple. Para esto, se requiere de analizar la ecuación y así tener una mejor representación de su gráfica. Para esto, de algunos conceptos adicionales.

Definición 3.2.2 *La gráfica de $f(x,y)=0$ es simétrica*

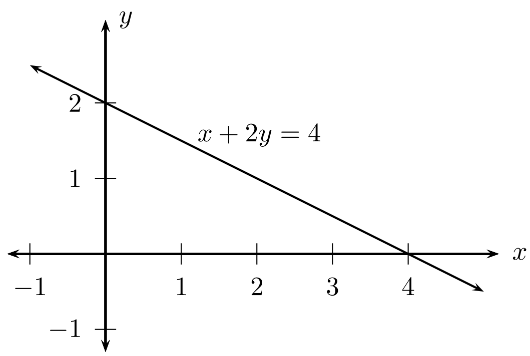

Figura 3.5 Gráfica de la ecuación de la recta: $x + 2y = 4$.

$i)$ *respecto del eje y si y sólo si*

$$f(x, y) = f(-x, y) \tag{3.2}$$

$ii)$ *respecto del eje x si y sólo si*

$$f(x, y) = f(x, -y) \tag{3.3}$$

$iii)$ *respecto del origen si y sólo si*

$$f(x, y) = -f(-x, -y) \tag{3.4}$$

Definición 3.2.3 *Considere una curva dada por la ecuación (3.1) y una recta l. Se dice que l es una* asíntota *de la curva si para un punto que se mueve sobre la curva, a medida que éste se aleja del origen su distancia a la recta se hace cada vez menor y* tiende a cero.

Con base en las definiciones, se sugieren los siguientes pasos para la elaboración de la gráfica de una ecuación

1. *Determinar la extensión de la gráfica:* para esto, se deben despejar una de las variables en términos de la otra; digamos despejar y en término de x y haciéndola variar determinar los valores permitidos para x. Después despejar x en términos de y para proceder de forma análoga.

2. *Determinar los puntos de intersección con los ejes:* para determinar tales puntos sobre el eje x, se toma $y = 0$ y se resuelve la ecuación resultante de la variable x. Si $x_1, x_2, \ldots, x_k$, son las soluciones de dcha ecuación entonces los puntos de corte con el eje x son $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_k, 0)$. Para hallar los puntos de corte con el eje y, se toma $x = 0$ y se procede de forma análoga.

3. *Determinación de simetrías:* la determinación de las simetrías respecto de cada uno de los ejes y del origen se hace con base a la definición (3.2.2). Conocer las simetrías es de gran ayuda para realizar el bosquejo de la gráfica. Por ejemplo, si la ecuación es

simétrica con respecto al eje y entonces el trazo de la gráfica para $x \geq 0$ se reproduce para $x \leq 0$ considerando al eje y como una especie de *espejo*.

4. *Determinación de las asíntotas:* para determinar las asíntotas con base en la definición (3.2.3), se despeja una variable en términos de la otra; por ejemplo, y en términos de x. Si la expresión resultante es un cociente donde aparece la variable en el denominador, entonces se iguala el denominador a cero y se resuelve para x. Si los valores son $x_1, x_2, \ldots, x_k$, entonces las asíntotas verticales son las rectas: $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_k$. Para las asíntotas horizontales se despeja x en términos de y y se procede de forma análoga.

5. *Determinación de puntos de la curva:* se sugiere dar valores *adecuados* para tabular algunos puntos de la curva. Preferentemente antes y después de los puntos de corte y de las asíntotas.

6. *Elaborar la gráfica:* con los elemento obtenidos elaborar la gráfica de la ecuación. Para esto, se deben ubicar los puntos determinados en el paso 5, y unirlos con trazos continuos.

EJEMPLO 3.4

Elaborar la gráfica de la ecuación

$$x^2 + 4y - 12 = 0.$$

Solución: Determinando la extensión de la gráfica: despejando y en términos de x

$$y = \frac{12 - x^2}{4}$$

así, x puede tomar cualquier valor real. Despejando x en términos de y

$$x = \pm\sqrt{12 - 4y},$$

la expresión dentro del radical debe cumplir con

$$12 - 4y \geq 0,$$

de donde se tiene

$$3 \geq y$$

Así, y está restringida a tomar valores menores o iguales a 3. Determinando las intersecciones con los ejes: si $x = 0$, entonces $y = 3$, por lo que la intersección con el eje y es $(0, 3)$. Si $y = 0$, entonces $x = \pm\sqrt{12}$ de donde los puntos de corte con el eje x son: $(\sqrt{12}, 0)$ y $(-\sqrt{12}, 0)$. Determinación de simetrías: reemplazando x con $-x$

$$(-x)^2 + 4y - 12 = x^2 + 4y - 12,$$

puesto que la ecuación no cambia, se tiene simetría respecto del eje y. Reemplazando y con $-y$ se tiene

$$x^2 + 4(-y) - 12 = x^2 - 4y - 12$$

puesto que cambia respecto de la ecuación original, no se tiene simetría respecto del eje x. Reemplazando (x, y) con $(-x, -y)$ se tiene

$$(-x)^2 + 4(-y) - 12 = x^2 - 4y - 12,$$

por lo que no hay simetría respecto del origen. Determinando asíntotas: aunque en la expresión para y se tiene un cociente, puesto que no aparece x en el denominador no se tienen asíntotas. La determinación de algunos puntos de la curva se muestra en la Tabla (3.1) incluyendo puntos antes y después de los puntos de corte con los ejes. Con estos elementos se elabora el bosquejo de la grafica la cual se muestra en la

Tabla 3.1 Puntos pertenecientes a la curva $x^2 + 4y - 12 = 0$.

x	$y = 3 - x^2/4$	(x, y)
-4	-1	$(-4, -1)$
$-\sqrt{12}$	0	$(-\sqrt{12}, 0)$
-3	$3/4$	$(-3, 3/4)$
-2	2	$(-2, 2)$
0	3	$(0, 3)$
2	2	$(2, 2)$
3	$3/4$	$(3, 3/4)$
$\sqrt{12}$	0	$(\sqrt{12}, 0)$
4	-1	$(4, -1)$

Figura (3.6), donde se señalan los puntos de corte con los ejes.

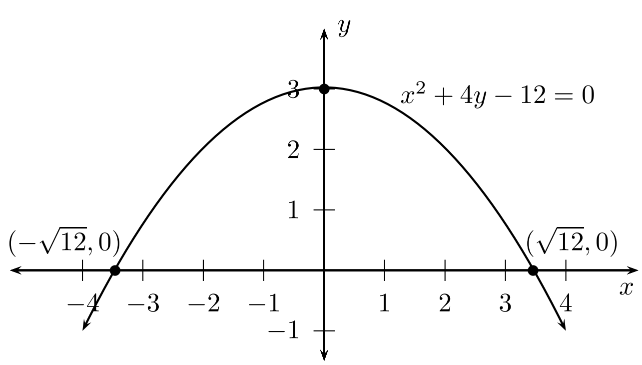

Figura 3.6 Gráfica de la ecuación $x^2 + 4y - 12 = 0$.

EJEMPLO 3.5

Elaborar la gráfica de la ecuación

$$xy - y - x = 0.$$

Solución: Determinando la extensión de la gráfica: despejando y en términos de x

$$y = \frac{x}{x-1}.$$

En este caso se tiene un cociente donde, aparece x en el denominador. Así, procediendo de acuerdo con el paso 4

$$x - 1 = 0$$

de donde

$$x = 1,$$

por lo que x puede tomar cualquier valor excepto $x = 1$. De hecho $x = 1$ es una asíntota de la gráfica. Despeando x en términos de y

$$x = \frac{y}{y-1}.$$

Puesto que es una expresión similar a la obtenida para $x = 1$ se puede concluir que $x = 1$ puede tomar cualquier valor excepto $y = 1$.
Determinando las intersecciones con los ejes: si $x = 0$, entonces $y = 0$, por lo que la intersección con el eje y es $(0, 0)$. Si $y = 0$, entonces $x = 0$ y se tiene el mismo punto; el origen.
Determinación de simetrías: reemplazando x con $-x$

$$(-x)y - y - (-x) = -xy - y + x,$$

puesto que cambia la ecuación, entonces no hay simetría con respecto del eje y. Reemplazando y con $-y$

$$x(-y) - (-y) - x = -xy + y - x,$$

por lo que no hay simetría con respecto del eje x. Reemplazando (x, y) con $(-x, -y)$ se tiene

$$(-x)(y) - (-y) - (-x) = xy + y + x,$$

puesto que la ecuación cambia, entonces no hay simetría con respecto del origen. Determinación de asíntotas: en la expresión para y en términos de x y de y en términos de x se tiene que $x = 1$ es una asíntota vertical y que $y = 1$ es una asíntota horizontal. La determinación de algunos puntos de la curva se muestra en la Tabla (3.6). En la Figura (3.7) se muestra la gráfica de la ecuación $xy - y - x = 0$. La lineas segmentadas son las asíntotas de la curva: $x = 1$ asíntota vertical y $y = 1$ asíntota horizontal.

Tabla 3.2 Puntos pertenecientes a la curva $x - y - x = 0$.

x	$y = x/(x-1)$	(x, y)
-3	$3/4$	$(-4, -1)$
-2	$2/3$	$(-\sqrt{12}, 0)$
0	0	$(-3, 3/4)$
2	2	$(-2, 2)$
3	$3/2$	$(3, 3/4)$

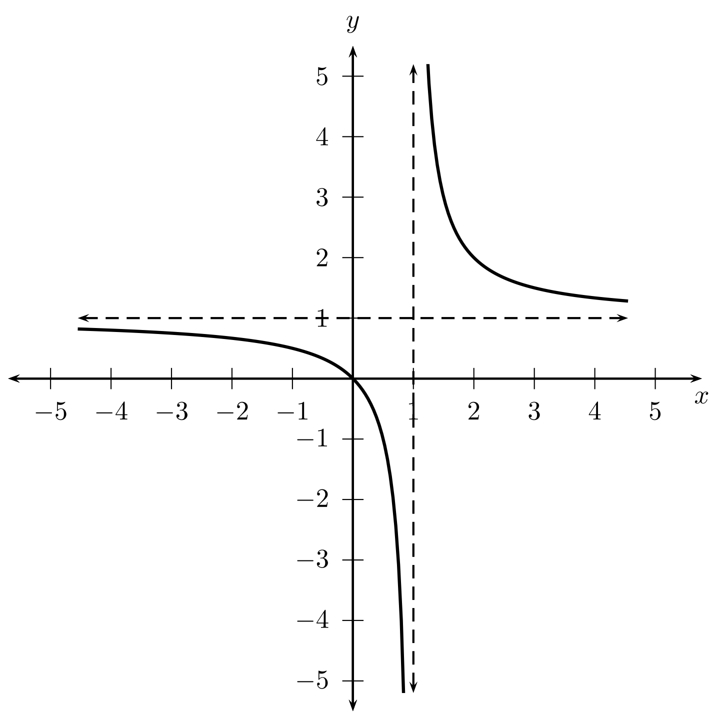

Figura 3.7 Gráfica de la ecuación $xy - y - x = 0$. Las lineas segmentadas corresponden a las asíntotas $x = 1$, $y = 1$.

EJERCICIOS

3.1 Halar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $A(2,1)$ y $B(1,2)$.

3.2 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan 5 unidades del punto $(-3,2)$.

3.3 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se encuentran a 3 unidades sobre el eje x.

3.4 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se encuentran a 3 unidades sobre la recta $3x+4y-5=0$.

3.5 Hallar la ecuación de los puntos tales que su distancia al eje x es igual a su distancia al eje y.

3.6 graficar el lugar geométrico dado por la ecuación

$$9x^2+16y^2=144.$$

3.7 Hallar los puntos de intersección, con los ejes coordenados, del lugar geométrico dado por la ecuación

$$9x^2+4y^2-36=0.$$

3.8 Graficar el lugar geométrico dado por la ecuación

$$y+x^2+4x+11=0.$$

3.9 Hallar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales del lugar geométrico dado por la ecuación

$$y+x^2+4x+11=0.$$

PROBLEMAS

3.1 Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve de tal forma que, su distancia al punto $(0, p)$ $(p > 0)$ es igual a su distancia a la recta $y = -p$, está dada por

$$y = \frac{x^2}{4p}.$$

3.2 Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento dad por los puntos $A(-5, 3)$ y $B(1, 1)$.

3.3 Hallas las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 10 =& 0 \\ 5x + 12y + 4 =& 0. \end{aligned}$$

3.4 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de su distancia a los puntos $A(0, 0)$ y $B(2, 3)$ es 12.

3.5 Hallar la ecuación de los puntos tales que su distancia al punto $(3, 0)$ es igual a su distancia a la recta $x + 1 = 0$.

3.6 Graficar el lugar geométrico dado por la ecuación

$$yx^2 - 9y + x = 0.$$

CAPÍTULO 4

LA CIRCUNFERENCIA

Junto con de la línea recta, la circunferencia es una de las figuras geométricas que más se encuentran en la vida cotidiana. Además, sus aplicaciones han permitido el avance de la tecnología y del conocimiento científico en general. A diferencia de la ecuación de la línea recta, en la cual se requiere de dos condiciones independientes para determinar su ecuación, para la circunferencia será necesario conocer de tres condiciones independientes.

4.1. Ecuación de la circunferencia con centro en $(0, 0)$

En este capítulo se presentan, además de las ecuaciones para describir la circunferencia, resultados conocidos de la geometría euclidiana presentados con el enfoque analítico.

Definición 4.1.1 *Una circunferencia C, es el lugar geométrico de un punto (x, y) que se mueve sobre un plano de tal forma que, su distancia a un punto fijo es siempre igual a una constante r. El punto fijo se llama el centro de la circunferencia y la distancia constante se llama el radio de la circunferencia.*

La Figura (4.1), corresponde al lugar geométrico de una circunferencia C de radio r con centro en el origen. Como consecuencia de la definición (4.1.1) se presenta el siguiente

Teorema 4.1 *La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es*

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4.1}$$

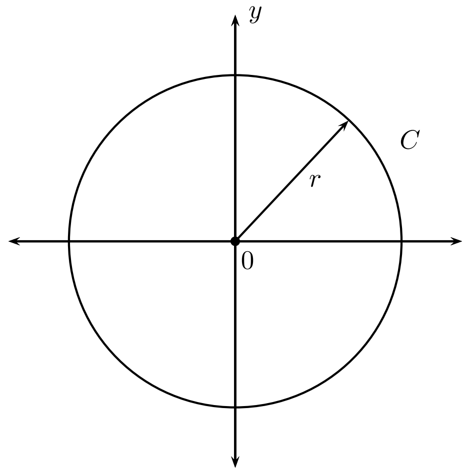

Figura 4.1 Circunferencia C de radio r con centro en el origen.

Demostración: Sea $P(x, y)$ un punto de la circunferencia C con centro en $(0, 0)$. Por la definición (4.1.1) se tiene que la distancia de (x, y) a $(0, 0)$ es r. Así,

$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2},$$

elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación se obtiene el resultado. ∎

EJEMPLO 4.1

Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y que pasa por el punto $(0, \sqrt{5})$.
Solución: Puesto que $(0, \sqrt{5})$ está sobre la circunferencia, el radio se obtiene de la distancia del centro al punto

$$r = \sqrt{(0 - 0)^2 + (\sqrt{5} - 0)^2} = \sqrt{5}.$$

Así, la ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 = 5.$$

Dada una circunferencia con centro en el origen de radio r y tres puntos R, P y Q, como se muestra en la Figura (4.2), se tiene que

$i)$ R es *exterior a la circunferencia*, si la distancia del centro a R es mayor que r,

$ii)$ P *pertenece a la circunferencia*, si la distancia del centro al punto P es igual a r,

$iii)$ Q es *interior a la circunferencia*, si la distancia del centro al punto Q es menor a r.

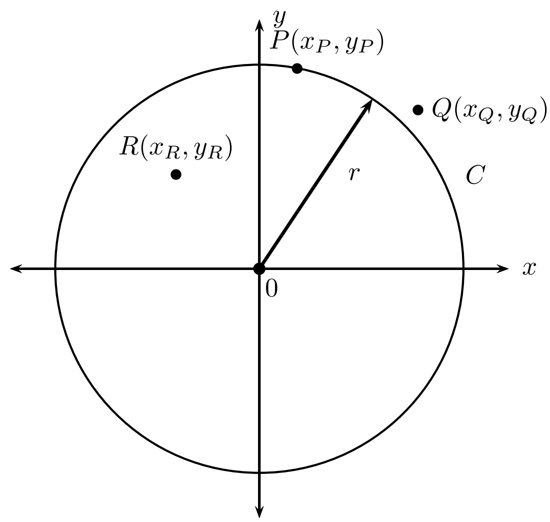

Figura 4.2 Circunferencia C de radio r, con puntos: R, P y Q interior, sobre y exterior a la circunferencia respectivamente.

EJEMPLO 4.2

La ecuación

$$x^2 + y^2 = 36,$$

representa una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 6. Determinar si los puntos $A(1, 1)$, $B(6, 0)$ y $C(5, 5)$ son interiores, exteriores o si pertenecen a la circunferencia.
Solución: Calculando las distancias, del centro de la circunferencia a los tres puntos dados

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < 6, \\ d_2 &= \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36} = 6, \\ d_3 &= \sqrt{(5-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50} > 6. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto $A(1, 1)$, es interior, el punto $B(6, 0)$ pertenece y el punto $C(5, 5)$ es exterior a la circunferencia.

4.2. Ecuación de la circunferencia con centro en (h, k)

Considere una circunferencia C con radio r cuyo centro es el punto (h, k). De acuerdo con la definición (4.1.1) se tiene el siguiente

Teorema 4.2 *La ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r es*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \tag{4.2}$$

Demostración: Sea (x, y) un punto de la circunferencia. Por la definición (4.1.1), la distancia entre (x, y) y (h, k) es

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}.$$

Elevando al cuadrado se obtiene el resultado. ■

La ecuación (4.2) se conoce como la *ecuación ordinaria de una circunferencia*. La Figura (4.2) muestra una circunferencia C con centro en el punto (h, k). A partir de la ecuación

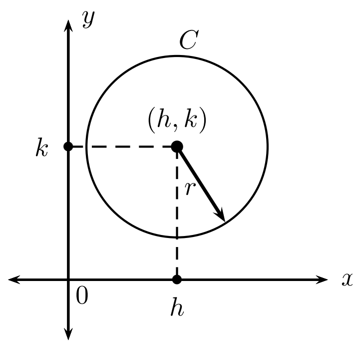

Figura 4.3 Circunferencia C de radio r, con centro en (h, k).

ordinaria de la circunferencia es claro que sólo se requiere conocer las coordenadas del centro y la longitud del radio para tener la ecuación de la circunferencia.

EJEMPLO 4.3

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(3, -2)$ y que pasa por el punto $A(3, 1)$.
Solución: Puesto que el punto A pertenece a la circunferencia, el radio se determina como la distancia de A al centro

$$r = \sqrt{(3-3)^2 + (1+2)^2} = 3.$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia es

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

EJEMPLO 4.4

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(3, 3)$ y tangente a los ejes coordenados en el primer cuadrante.
Solución: Puesto que la circunferencia es tangente a los ejes, el radio se puede determinar como la distancia del centro a uno de los ejes. Tomando el eje x, entonces se debe calcular la distancia el centro a la recta $y = 0$. Así, el radio es el valor absoluto

de la diferencia de las ordenadas

$$r = |3 - 0| = 3,$$

por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9,$$

Como se mencionó al inicio de este capítulo, para determinar la ecuación de una circunferencia se requieren tres condiciones independientes. Como ejemplo, se presenta el problema de determinar la ecuación de una circunferencia circunscrita en un triángulo.

EJEMPLO 4.5

Considere el triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(-1,1)$ y $C(-2,-2)$, encontrar la ecuación de circunferencia circunscrita.
Solución: La circunferencia circunscrita en un triángulo $\triangle ABC$ es la de menor radio que lo contiene completamente. Su centro se encuentra en el punto de intersección de sus mediatrices y se llama *circuncentro*. Así, para cada lado se calculan el punto medio, su pendiente m y su correspondiente pendiente perpendicular $m_\perp$. Con los puntos medios y las pendientes perpendiculares se obtienen las ecuaciones de las mediatrices l_1, l_2 y l_3. En la Tabla (4.1) se muestra, para cada lado del triángulo, las coordenadas del punto medio, la pendiente perpendicular al lado ($m_\perp$) y la correspondiente ecuación de la mediatriz del lado. Tomando cualesquiera dos mediatrices, la intersección

Tabla 4.1 Ecuaciones de las mediatrices l_1, l_2 y l_3 del $\triangle ABC$.

Lado	Punto Medio	$m_\perp$	Mediatriz
AB	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	-3	$l_1: \ y + 3x = 3$
BC	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{3}$	$l_2: \ 3y + x = -3$
CA	$(0,0)$	-1	$l_3: \ y + x = 0$

de ellas proporciona las coordenadas del circuncentro. Así, tomado l_2 y l_3 se tiene

$$\begin{aligned} 3y + x &= -3 \\ y + x &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se tiene: $x = 3/2$, $y = -3/2$. Por tanto, las coordenadas del circuncentro son, $(3/2, -3/2)$. El circuncentro tiene la propiedad de ser equidistante a los vértices, por lo que el radio se determina con la distancia del circuncentro a uno de los vértices. Así, calculando la distancia r, del circuncentro al vértice A

$$r = \sqrt{(2-3/2)^2 + (2+3/2)^2} = \frac{\sqrt{50}}{2}.$$

La ecuación de la circunferencia circunscrita es entonces

$$(x-3/2)^2 + (y+3/2)^2 = \frac{50}{4}$$

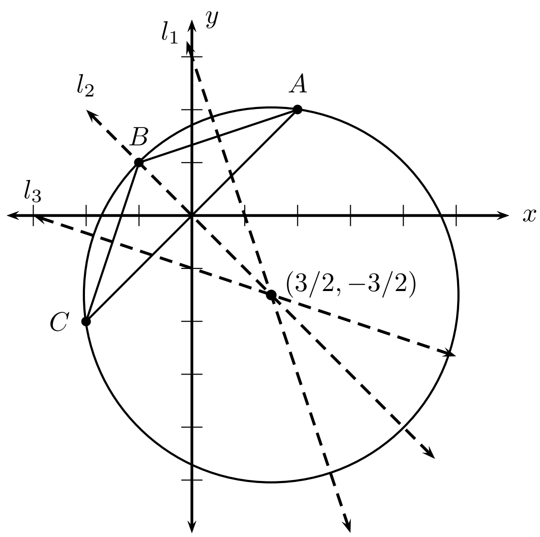

Figura 4.4 Circunferencia circunscrita en el $\triangle ABC$.

En la Figura (4.4), se muestra el triángulo ABC, las tres mediatrices y la gráfica de la circunferencia circunscrita.

4.3. Forma general de la ecuación de la circunferencia

Considere la ecuación de la circunferencia con centro en (h, k). Desarrollando los cuadrados y transponiendo el radio al cuadrado

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

haciendo

$$A = -2h, \quad B = -2k, \quad C = h^2 + k^2 - r^2,$$

se tiene

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \tag{4.3}$$

La ecuación (4.3) se conoce como la *forma general* de la ecuación de la circunferencia. Puesto que la ecuación (4.3) puede ser multiplicada con un escalar diferente de cero y continuará representado la misma ecuación se tiene que, los coeficientes de x^2 y y^2 pueden ser diferentes de 1 siempre que sean iguales y diferentes a cero.

EJEMPLO 4.6

Exprese la ecuación de la circunferencia con centro en $(3, -2)$ y radio $\sqrt{7}$ en la forma general.
Solución: La ecuación ordinaria de la circunferencia es

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 7.$$

Desarrollando los cuadrados y transponiendo el radio al cuadrado

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 + 4 - 7 = 0,$$

simplificando,

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 6 = 0.$$

EJEMPLO 4.7

Investigar si la ecuación

$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 4y - 8 = 0$$

representa la ecuación de una circunferencia. De ser así, determinar su centro y su radio.
Solución: Dividiendo con 2 la ecuación se tiene

$$x^2 + y^2 + 3x + 2y - 4 = 0.$$

Transponiendo el término constante y completando cuadrados

$$x^2 + 3x + 9/4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 9/4 + 1 = 29/4$$

simplificando,

$$(x + 3/2)^2 + (y + 1)^2 = 29/4.$$

Así, la ecuación

$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 4y - 8 = 0,$$

es la ecuación de una circunferencia con centro en $(-3/2, -1)$ y radio $\sqrt{29}/2$.

Dada una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \tag{4.4}$$

es importante conocer qué condiciones deben satisfacer los coeficientes $A,\ B$ y C, para que la ecuación (4.4) sea la ecuación de una circunferencia.
Transponiendo el término constante y completando los cuadrados de la ecuación (4.4)

$$x^2 + Ax + (A/2)^2 + y^2 + By + (B/2)^2 = (A/2)^2 + (B/2)^2 - C,$$

así

$$(x + A/2)^2 + (y + B/2)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}. \tag{4.5}$$

Haciendo

$$h = -\frac{A}{2},\ k = -\frac{B}{2},\ r = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4},$$

se tienen los siguientes casos

i) si, $A^2 + B^2 > 4C$, entonces la ecuación (4.4) representa la ecuación de una circunferencia con centro en $(-A/2, -B/2)$ y radio

$$r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}}.$$

ii) si, $A^2 + B^2 = 4C$, se tiene un sólo punto de coordenadas $(-A/2, -B/2)$.

iii) si, $A^2 + B^2 < 4C$, la ecuación (4.4), no representa lugar geométrico alguno.

EJEMPLO 4.8

Investigar qué representan las siguientes ecuaciones

i) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$.

ii) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26 = 0$.

iii) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 46 = 0$.

Solución:

i) Para esta ecuación se tiene $A = -2$, $B = 6$ y $C = 6$. Así,

$$\frac{(-2)^2 + 6^2 - 4(6)}{4} = 4.$$

Por lo que representa una circunferencia de radio 2 y con centro en

$$(-A/2, -B/2) = (1, -3).$$

ii) Para esta ecuación se tiene $A = -2$, $B = -10$ y $C = 26$. Así

$$\frac{(-2)^2 + (-10)^2 - 4(26)}{4} = 0.$$

Por lo que representa las coordenadas del punto

$$(-A/2, -B/2) = (1, 5).$$

iii) Para esta ecuación se tiene $A = -10$, $B = 8$ y $C = 46$. Así,

$$\frac{(-10)^2 + 8^2 - 4(46)}{4} = \frac{-20}{4} = -5 < 0,$$

por lo que no representa lugar geométrico alguno.

4.4. Recta tangente a una circunferencia

En diversas aplicaciones de la recta y la circunferencia es importante determinar la ecuación de una recta tangente a una circunferencia. La determinación de rectas tangentes a circunferencias o curvas planas en general corresponde al *Cálculo*. Sin embargo, en esta sección se abordan algunos casos en los cuales es posible determinar la ecuación de la recta tangente a una circunferencia. Se consideran los siguientes casos.

I. **Se conocen la ecuación de la circunferencia y el punto de contacto**. En este caso se conoce el punto de tangencia (x_1, y_1) y falta determinar la pendiente de la recta. Para determinarla, considere la recta que va del centro de la circunferencia al punto de tangencia. Esta recta se llama *recta normal* a la circunferencia en el punto de tangencia (x_1, y_1). Puesto que la recta tangente (T) y la recta normal (N) en el punto de tangencia son perpendiculares, ver Figura(4.5), este hecho permite determinar la pendiente de la recta tangente.

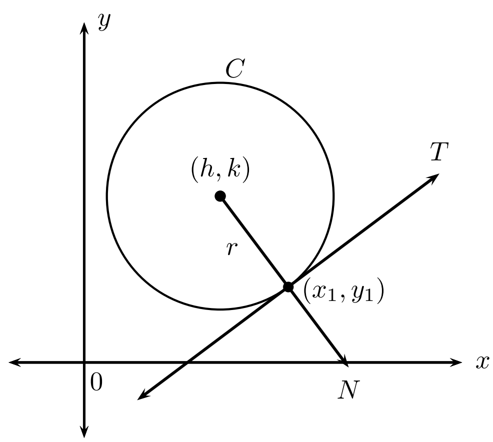

Figura 4.5 Rectas normal (N) y tangente (T) a una circunferencia C, en el punto (x_1, y_1).

EJEMPLO 4.9

Considere la circunferencia con ecuación

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$$

Hallar le ecuación de la recta tangente T a la circunferencia en el punto $(5, 4)$.

Solución: La pendiente de la recta normal N es

$$m_N = \frac{4-2}{5-3} = 1.$$

Usando el punto de tangencia, la recta normal tiene por ecuación

$$N : y = x - 1.$$

Puesto que la recta normal N y la recta tangencial T son perpendiculares, la pendiente de la recta T es; $m_T = -1$. Con esto, la recta tangente en el punto de tangencia $(5,4)$ tiene por ecuación

$$T : y = -x + 9.$$

La Figura (4.6) muestra las rectas normal (N) y tangente (T) a la circunferencia en el punto $(5,4)$.

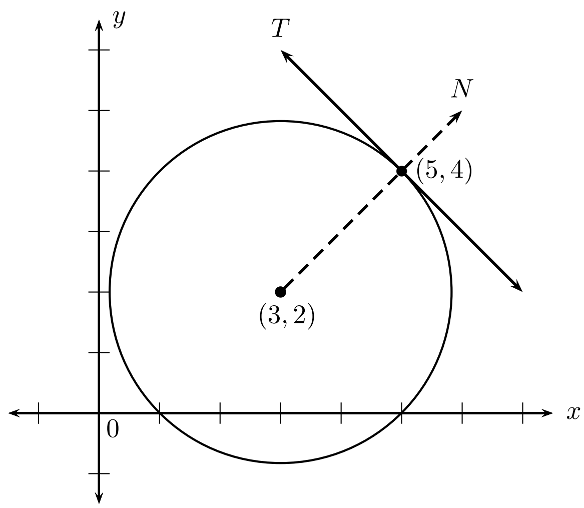

Figura 4.6 Rectas normal N (trazo discontinuo) y tangente T (trazo continuo) a la circunferencia $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$, en el punto $(5,4)$.

II. **Se conocen la ecuación de la circunferencia y la pendiente de la recta tangente**. En este caso se tendrán dos rectas tangentes a la circunferencia. Puesto que se conoce la pendiente m de la recta tangente T, se puede obtener la ecuación de la recta normal en los puntos de tangencia usando las coordenadas del centro de la circunferencia y la pendiente $-1/m$. La intersección de la recta normal con la circunferencia determina los puntos de tangencia (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Como resultado se tendrán los dos puntos de corte de la recta normal con la circunferencia y por tanto las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia.

EJEMPLO 4.10

Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0,$$

y paralelas a la recta l dada por la ecuación: $y = 3x + 6$.

Solución: Escribiendo la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10.$$

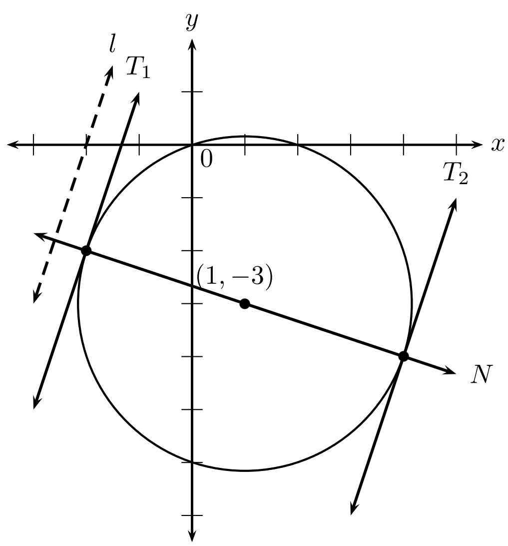

Figura 4.7 Rectas tangentes, T_1, T_2 y la recta normal N (trazo continuo) en los puntos de tangencia $(-2,-2)$ y $(4,-4)$, a la circunferencia $(x-1)^2+(y+3)^2=10$. Recta l paralela a las tangentes (trazo discontinuo).

La pendiente de la recta l es $m=3$. Por lo tanto, la pendiente de la recta normal N es $m_{\perp}=-1/3$. Así, la ecuación de la recta normal es

$$N : 3y + x + 8 = 0.$$

Despejando x y sustituyendo en la ecuación de ordinaria de la circunferencia se tiene

$$(-3y-9)^2+(y+3)^2=10(y+3)^2=10.$$

Los valores de y son: $y_1=-2, y_2=-4$. Sustituyendo ambos valores en la ecuación de la normal se tiene que los puntos de tangencia son: $(-2,-2)$ y $(4,-4)$. Así, las rectas tangentes son

$$\begin{aligned} T_1 : y =& 3x+4 \text{ y} \\ T_2 : y =& 3x-16. \end{aligned}$$

En la Figura (4.7) se muestran las gráficas de ambas rectas tangentes T_1 y T_2, así como la gráfica de la recta l, paralela a las tangentes.

EJERCICIOS

4.1 Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(-5, 5)$ y que es tangente al eje y.

4.2 Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(2, -1/2)$ y que es tangente al eje x.

4.3 Dada la circunferencia

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 13$$

indique si los puntos $A(3, 5)$, $B(1, 4)$ y $C(4, 1)$ son interiores, exteriores o si están sobre la circunferencia.

4.4 Hallar la ecuación de la circunferencia con radio 6 y tangente a los ejes coordenados en el tercer cuadrante.

4.5 Hallar el valor de C para que la ecuación $x^2 - 2x + y^2 + 3y + C = 0$ represente una circunferencia de radio 2.

4.6 El segmento delimitado por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(3, -2)$ es un diámetro de una circunferencia. Hallar su ecuación.

4.7 Hallar la ecuación de una circunferencia de radio 5, que pasa por el origen y que la ordenada de su centro es 3 (dos soluciones).

4.8 Una circunferencia que pasa por los puntos $A(-3, 0)$ y $B(-1, 2)$ tiene su centro sobre la recta $x - y = 9$. Hallar su ecuación.

4.9 Hallar la ecuación con centro en $(-3, 6)$ y tangente a la recta $y - x = -4$

4.10 Una cuerda de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 36$$

está sobre la recta $y - x + 3 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda.

PROBLEMAS

4.1 Demuestre que la ecuación

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0$$

es la ecuación de una circunferencia. Encuentre su centro y su radio.

4.2 Para la ecuación del problema (4.1) encuentre las ecuaciones de la normal y la tangente en el punto $(2, 0)$.

4.3 Demuestre que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

4.4 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(1, 0)$ y que es tangente a la recta $y + 2x + 6 = 0$ en el punto $(-3, 0)$.

4.5 Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos rectas tangentes. Demuestre que, las distancias desde el punto exterior a los puntos de tangencia son iguales.

4.6 Considere una circunferencia C de radio r y un punto fijo A en ella. Demuestre que el lugar geométrico de todos los puntos medios de las cuerdas trazadas desde A, es una circunferencia de radio $r/2$.

4.7 Hallar el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de todos los triángulos rectángulos que tienen como hipotenusa el segmento determinado por los puntos $(0, b)$ y (a, b).

4.8 Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes, con pendientes $m = -1$, a la circunferencia

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8.$$

CAPÍTULO 5

LA PARÁBOLA

En diversas áreas del conocimiento se presentan situaciones o fenómenos naturales pueden ser descritos usando, como modelos matemáticos, ecuaciones de la forma

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{5.1}$$

El lugar geométrico descrito por estas ecuaciones cuadráticas se llama *parábola*. Debido a sus diversas aplicaciones resulta de gran utilidad conocer las propiedades geométricas de la parábola.

5.1. Ecuación de la Parábola con vértice en $(0, 0)$

Definición 5.1.1 *Una parábola es el lugar geométrico de de todos los puntos de un plano que equidistan de una recta fija l y de un punto fijo F que no pertenece a la recta fija ni a la parábola .*

En la Figura (5.1) se muestra la gráfica de una parábola, su punto fijo F, la recta fija l y un punto $A(x, y)$ que pertenece a la parábola. De acuerdo con la definición (5.1.1), la distancia desde cualquier punto A de la parábola, al punto F es igual a la distancia del punto A a la recta l. Se debe notar que la distancia de A a l, es la distancia de un punto a una recta, es decir, es la distancia que va del punto A perpendicularmente a la recta l.

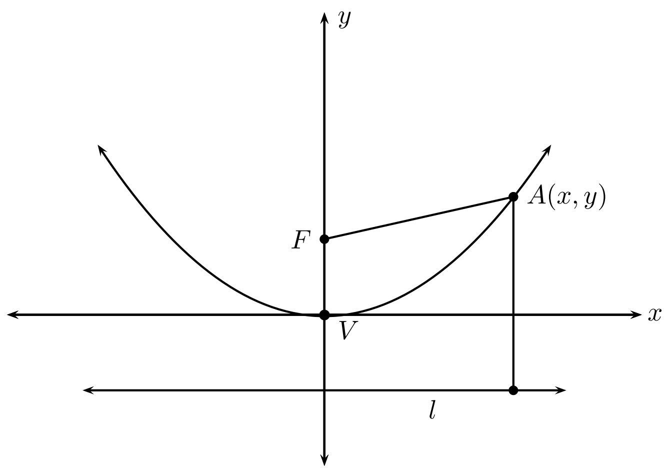

Figura 5.1 Parábola con punto fijo F y recta fija l. El punto $P(x, y)$ pertenece a la parábola.

El punto fijo y la recta fija se llaman *foco* y *directriz* respectivamente. La recta que pasa por el foco y que es perpendicular a la directriz se llama *eje de la parábola*. El eje de la parábola la corta en el punto V, llamado *vértice*.

La deducción de la ecuación del lugar geométrico de la parábola se apoyará en la Figura (5.1). El eje de la parábola coincide con el de las ordenadas y las coordenadas del vértice son $V(0,0)$. Así, sin pérdida de generalidad, se puede asignar las coordenadas $(0, p)$ al foco ($p > 0$). Para esta parábola, la directriz l es una recta paralela al eje de las abscisas que se encuentra a la distancia p, del vértice. Así, la ecuación de la directriz es

$$l: \ y = -p.$$

Con esto en cuenta, la ecuación de la parábola se establece en el siguiente

Teorema 5.1 *La ecuación de la parábola con vértice en* $(0,0)$ *y cuyo eje es coincidente con el eje de las ordenadas es*

$$4py = x^2.$$

Demostración: Para el punto $A(x, y)$ de la parábola, las distancias del punto A al foco (d_1) y la distancia de A a la directriz (d_2) deben ser iguales. Para d_1 se tiene

$$d_1 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}.$$

Para la distancia d_2, está dada por el valor absoluto de la diferencia de las ordenadas,

$$d_2 = |y + p|.$$

Igualando las expresiones para d_1 y d_2 y elevando al cuadrado

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

Simplificando,

$$x^2 = 4py. \tag{5.2}$$

■

Análogamente, la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje coincidente con el eje x y foco en la parte positiva del eje x, es (ver ejercicio 5.1)

$$y^2 = 4px. \tag{5.3}$$

También se deja como ejercicios (ejercicios 5.3 y 5.4) mostrar que

$i)$ la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje coincidente con el eje y y con el foco en la parte negativa del eje y es

$$x^2 = -4py. \tag{5.4}$$

$ii)$ la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje coincidente con el eje x, y con el foco en la parte negativa del eje x es

$$y^2 = -4px. \tag{5.5}$$

EJEMPLO 5.1

Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y con foco en la parte negativa del eje y y que pasa por el punto $(2,-2)$.
Solución: La ecuación de la parábola está dada por la ecuación (5.4). Para determinar el valor de p, se evalúa en el punto. Así,

$$2^2 = -4p(-2)$$

de donde $p = 1/2$. Por tanto la ecuación es

$$x^2 = -2y^2.$$

Las ecuaciones (5.2) a la (5.5), se conocen como las ecuaciones *canónicas* de la parábola. Cuando la variable elevada al cuadrado es la y se dice que la parábola es horizontal y dependiendo del signo la parábola se abre hacia la derecha $(+)$ o hacia la izquierda $(-)$. Si la variable x es la que está elevada al cuadrado se dice que la parábola es vertical y la parábola abre hacia arriba $(+)$ o hacia abajo $(-)$. En los problemas que pueden ser modelados por parábolas verticales se tiene, en sus vértices, los puntos extremos del modelo; *valores máximos* para las parábolas que abren hacia abajo y *valores mínimos* para las parábolas que abren hacia arriba.
Puesto que $p > 0$ es evidente, en la ecuación (5.2), que y está restringida a valores no-negativos $(y \geq 0)$, por lo que la gráfica de la parábola estará en los cuadrantes I y II. Mediante análisis similares para las ecuaciones (5.3) a la (5.5), se encuentran los rangos de variación para x, y así como los cuadrantes en los que se encontraran sus respectivas gráficas. Estos resultados se presentan en la Tabla (5.1).
Elementos de la parábola: Considere la gráfica de la parábola de la Figura (5.2). Cualquier segmento de recta que une dos puntos diferentes de la parábola, como el segmento MN,

Tabla 5.1 Propiedades de las gráficas de las ecuaciones ordinarias de las parábolas.

Ecuación	Abre hacia	Extensión en x	Extensión en y	Gráfica en cuadrantes
$x^2 = 4py$	arriba	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$	I y II
$y^2 = 4px$	derecha	$[0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	I y IV
$x^2 = -4py$	abajo	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, 0]$	III y IV
$y^2 = -4px$	izquierda	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, \infty)$	II y III

se llama *cuerda*. Si la cuerda pasa por el foco, segmento RS, se llama *cuerda focal*. La cuerda focal perpendicular al eje, segmento PQ, se llama *lado recto*. El segmento de recta que une cualquier punto de la parábola con el foco se llama *radio vector*, como el segmento FA.

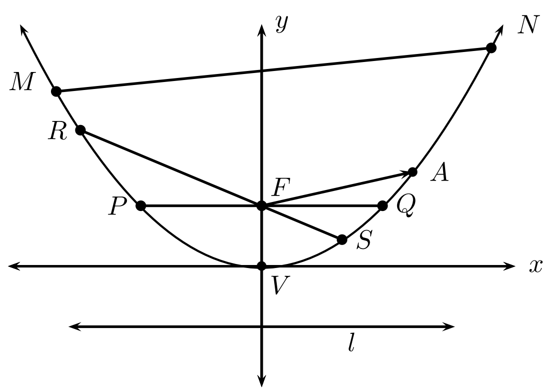

Figura 5.2 Elementos de la parábola con vértice en el origen y eje de la parábola coincidente con el eje de las ordenadas.

Uno de los elementos de mayor importancia de la parábola es la longitud del lado recto. Esta longitud puede ser determinada usando la ecuación (5.2). Para esto, note que el lado recto pertenece a una recta paralela al eje de las abscisas que pasa por $(0, p)$. La ecuación de esta recta es: $y = p$. Para encontrar los puntos de intersección de esta recta con la parábola se sustituye $y = p$, en la ecuación (5.2)

$$x^2 = 4p^2,$$

de donde, $x = \pm 2p$. Así, los puntos de intersección son: $(-2p, p)$ y $(2p, p)$. Por lo tanto, la longitud del lado recto es el valor absoluto de la diferencia de las abscisas: $4p$.

EJEMPLO 5.2

Considere la parábola, $y^2 = -8x$. Calcule la longitud de su lado recto, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

Solución: Puesto que en la ecuación el cuadrado corresponde a y, se trata de una parábola que se abre horizontalmente. Por el signo negativo, la parábola se abre a la izquierda. Comparando su ecuación con la ecuación (5.5), se tiene: $-8 = -4p$, de donde $p = 2$. Así, la longitud del lado recto es $4p = 8$, las coordenadas del foco son $(-2, 0)$ y la ecuación de la directriz l, es $x = 2$. La Figura (5.3) muestra la gráfica de la parábola.

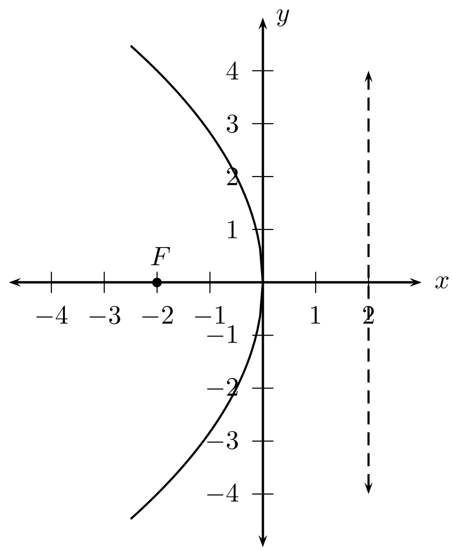

Figura 5.3 Gráfica de la parábola $y^2 = -8x$, con foco en $F(-2, 0)$, la recta segmentada representa la directriz $x = 2$.

5.2. Ecuación de la parábola con vértice en (h, k)

En algunas ocasiones es conveniente que el vértice de la parábola no esté en el origen de coordenadas $(0, 0)$, sino en las coordenadas (h, k). Para determinar la ecuación de esta clase de parábolas se considera una traslación de ejes a un nuevo sistema de coordenadas (x', y') donde, el eje x' es paralelo al eje x, el eje y' es paralelo al eje y y el origen $0'$ coincide con el punto (h, k) como se muestra en la Figura (5.4). En este caso, la ecuación de la parábola con vértice en (h, k) se establece en el siguiente

Teorema 5.2 *La ecuación de la parábola con vértice en* (h, k)*, eje paralelo al eje y y con concavidad hacia arriba es*

$$4p(y - k) = (x - h)^2 \tag{5.6}$$

Demostración: De acuerdo con la Figura (5.4), en el sistema de coordenadas (x', y'), la ecuación de la parábola es

$$4py' = x'^2 \tag{5.7}$$

donde los dos sistemas de coordenadas se relacionan mediante

$$x = x' + h; \qquad y = y' + k$$

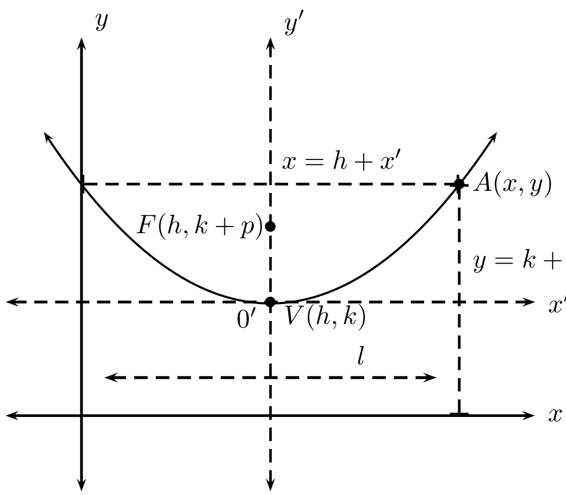

Figura 5.4 Parábola con eje paralelo al eje y, vértice en (h, k), foco en $F(h, k+p)$ y directriz la recta $y = k - p$.

de donde

$$x' = x - h; \quad y' = y - k.$$

Así, expresando la ecuación (5.7), en términos del sistema de coordenadas (x, y) se obtiene el resultado. ■

La ecuación (5.6), se conoce como la ecuación *ordinaria* de de la parábola y al igual que para las parábolas con vértice en el origen se tienen los siguientes casos:

1. Si la parábola se abre hacia abajo entonces su ecuación es

$$-4p(y - k) = (x - h)^2. \tag{5.8}$$

2. Si la parábola se abre hacia la derecha entonces su ecuación es

$$4p(x - h) = (y - k)^2 \tag{5.9}$$

3. Si la parábola se abre hacia la izquierda entonces su ecuación es

$$-4p(x - h) = (y - k)^2 \tag{5.10}$$

En la Tabla (5.2), se muestran las ecuaciones de las directrices, las coordenadas de los focos y las concavidades para las 4 ecuaciones ordinarias de la parábola.

EJEMPLO 5.3

Dada la ecuación de la parábola

$$8(y + 3) = (x - 2)^2$$

Tabla 5.2 Parámetros para las 4 ecuaciones ordinarias de la parábola.

Ecuación	Directriz	Foco	Abre hacia
$4p(y-k)=(x-h)^2$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	Arriba
$-4p(y-k)=(x-h)^2$	$y=k+p$	$F(h,k-p)$	Abajo
$4p(x-h)=(y-k)^2$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	Derecha
$-4p(x-h)=(y-k)^2$	$x=h+p$	$F(h-p,k)$	Izquierda

hallar el vértice, foco y las ecuaciones de la directriz y del eje y bosquejar la gráfica.
Solución: La ecuación de esta parábola es de la forma (5.6) por lo tanto, el vértice es $(2,-3)$. Puesto que $4p = 8$, tenemos $p = 2$. Usando los parámetros listados en la primera fila de la Tabla (5.2), tenemos que las coordenadas del foco son $F(2,-1)$, la ecuación de la directriz es $y = -5$ y la ecuación del eje es $x = 2$. La gráfica se muestra en la Figura (5.5).

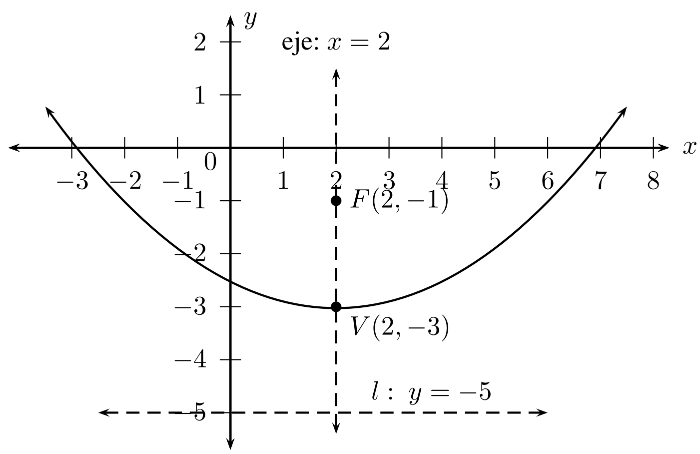

Figura 5.5 Grafica de la parábola: $8(y+3)=(x-2)^2$.

5.3. Ecuación de la recta tangente a una parábola

Considere una parábola vertical con vértice en el origen, que abre hacia arriba y dos rectas tangentes T_1 y T_2 a ambos lados del eje de la parábola como se muestra en la Figura (5.6). La ecuación de la recta tangente en le punto (x_1, y_1) está dada en el siguiente

Teorema 5.3 *Considere un punto (x_1, y_1) perteneciente a la parábola dada por la ecuación*

$$x^2 = 4py.$$

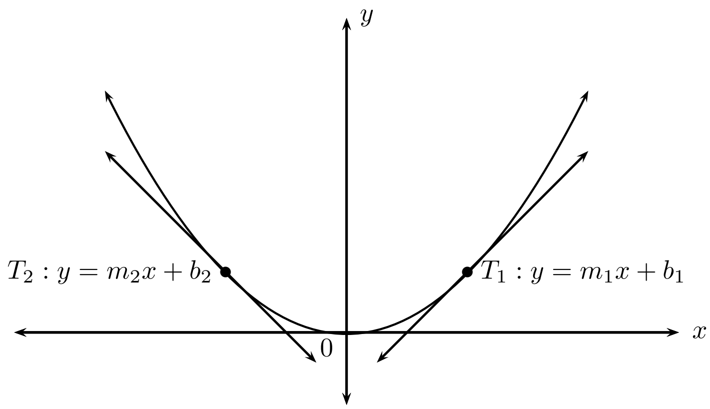

Figura 5.6 Grafica de dos rectas tangentes, T_1 y T_2 a una parábola cóncava hacia arriba.

La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_1, y_1)*, está dada por*

$$x_1y - 2y_1x + x_1y_1 = 0. \tag{5.11}$$

Demostración: Sea $y = mx + b$, la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_1, y_1). Puesto que el punto pertenece tanto a la recta como a la parábola se tiene

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ x_1^2 &= 4py_1 \end{aligned}$$

Entonces, se debe encontrar la pendiente m y la intersección con el eje de las ordenadas b, en términos del punto (x_1, y_1). Resolviendo simultáneamente ambas ecuaciones

$$x^2 = 4py = 4p(mx + b) = 4pmx + 4pb,$$

la cual es una ecuación cuadrática

$$x^2 - 4pmx - 4pb = 0. \tag{5.12}$$

Para que ambas curvas se corten en un sólo punto, se debe cumplir que el discriminante sea cero, es decir,

$$(-4pm)^2 - 4(-4pb) = 16p^2m^2 + 16pb = 0.$$

Despejando p en términos de b y m y sustituyendo en la ecuación (5.12)

$$x^2 + 4\frac{b}{m^2}mx + 4\frac{b}{m^2}b = \left(x + \frac{2b}{m}\right)^2 = 0,$$

de donde $x_1 = -2b/m$. Sustituyendo en la ecuación de la recta

$$y_1 = m\left(\frac{-2b}{m}\right) + b = -b.$$

de donde,

$$m = \frac{2y_1}{x_1}.$$

Sustituyendo las expresiones de m y b, en términos de x_1, y_1, en la ecuación de la recta se obtiene

$$x_1 y - 2y_1 x + x_1 y_1 = 0.$$

■

Corolario 5.3.1 *La ecuación de la recta normal a la parábola* $x^2 = 4py$ *en el punto* (x_1, y_1)*, está dada por*

$$2y_1(y - y_1) = x_1(x_1 - x). \tag{5.13}$$

Demostración: Puesto que la recta normal es perpendicular a la recta tangente en el punto (x_1, y_1), basta con tomar la pendiente recíproca negativa

$$m_\perp = \frac{-x_1}{2y_1}.$$

■

EJEMPLO 5.4

Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $x^2 = 4y$, en el punto $(2, 1)$.
Solución: Usando la ecuación (5.11) tenemos, para la recta tangente

$$y - x + 1 = 0.$$

Para la recta normal su usa la ecuación (5.13)

$$y + x - 3 = 0.$$

La Figura (5.4) muestra las gráficas de las rectas normal N y tangente T a la parábola en el punto $(2, 1)$.

Para las parábolas verticales con vértice en el origen y que abren hacia abajo se puede, por un procedimiento similar, mostrar que las pendientes de las rectas tangente m_T y normal m_N en un punto (x_1, y_1), coinciden con las pendientes de las parábolas que abren hacia arriba y por tanto, las ecuaciones para las rectas tangente y normal tienen las mismas expresiones.

Ahora para las parábolas con concavidad horizontal; $y^2 = \pm 4px$, se deja al lector (ver problema (5.1)) demostrar que las pendientes de las rectas tangente m_T y normal m_N en un punto $P(x_1, y_1)$ de la parábola están dada por

$$m_T = \frac{y_1}{2x_1},$$
$$m_N = -\frac{2x_1}{y_1}.$$

Propiedad de reflexión de la parábola: Una de las propiedades de mayor aplicación de las parábolas es la de reflexión. Esta propiedad consiste en que si un haz de luz con trayectoria

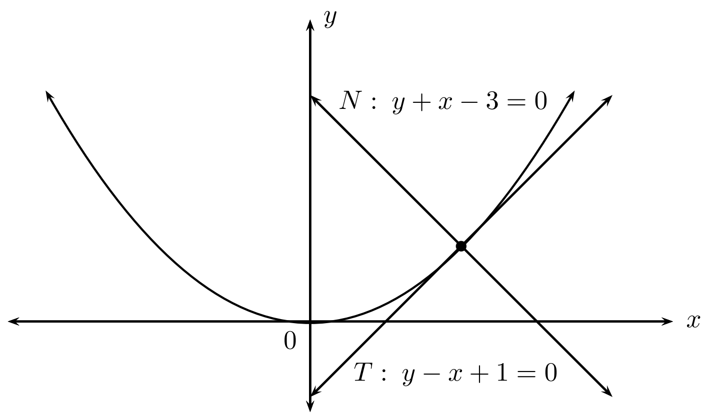

Figura 5.7 Rectas tangente T y normal N a la parábola $x^2 = 4y$, en el punto $(2, 1)$.

paralela al eje de la parábola, incide sobre su superficie, este haz será reflejado al foco. Recíprocamente, si un haz de luz es emitido del foco en dirección a la superficie de la parábola, entonces este haz será reflejado en dirección paralela al eje de la parábola. Entre las aplicaciones de esta propiedad de las parábolas se tienen los faros de los autos. Los faros emiten luz desde la posición del foco que se refleja en una superficie parabólica y salen en dirección paralela al eje. Otra aplicación es en las antenas parabólicas de radio. Estas, tienen la propiedad de recibir la señal de radio en sus superficies y enviarla al foco para de ahí ser enviadas a los receptores.

La propiedad de reflexión de la parábola se presenta en el siguiente teorema. Para esta demostración y sin pérdida de generalidad, se usará una parábola con vértice en $(0, 0)$ que abre hacia arriba.

Teorema 5.4 *Considere una recta l paralela al eje de la parábola y que la corta en el punto $A(x_1, y_1)$. La recta normal N en punto $A(x_1, y_1)$ forma los ángulos α, con la recta l y β con el radio vector FA tales que $\alpha = \beta$.*

Demostración: Considere la parábola $x^2 = 4py$, una recta l paralela al eje de la parábola y la recta normal N que se cortan en el punto $A(x_1, y_1)$, perteneciente a la parábola. Con esto, se tienen los ángulos α, formado por la recta l y la normal N y el ángulo β, formado con el radio vector FA y la normal N como se muestra en la Figura (5.8). Sea θ el ángulo de inclinación de la recta normal N. Puesto que la recta l es paralela la eje y se tiene la relación $\theta = \pi/2 + \alpha$. Así, para la pendiente de la recta normal se tiene

$$m_N = \tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha = -\frac{x_1}{2y_1}.$$

de donde

$$\tan\alpha = \frac{2y_1}{x_1}. \tag{5.14}$$

Para el ángulo β, se tiene que la pendiente m_{FA}, del radio vector FA es

$$m_{FA} = \frac{y_1 - p}{x_1}.$$

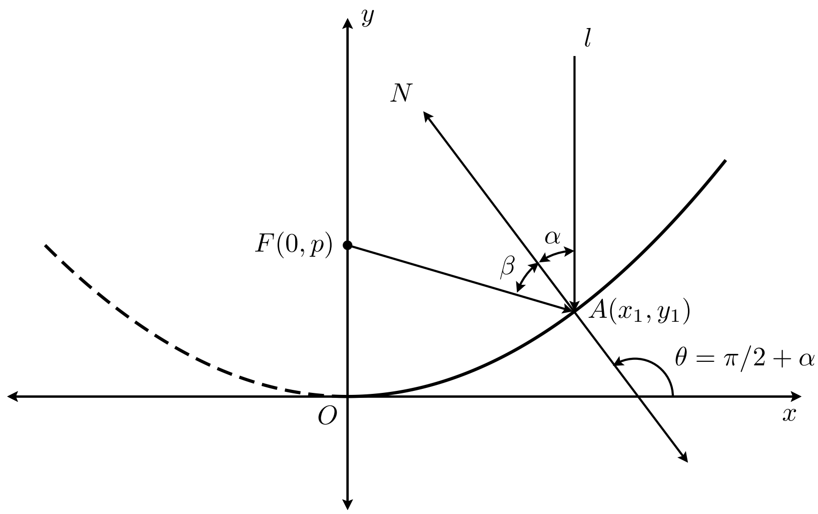

Figura 5.8 Recta l que corta a la parábola $4py = x^2$, en el punto A y que es paralela al eje. La normal N forma los ángulos α, con la recta l y β con el radio vector FA.

$$\tan\beta = \frac{m_{FA} - m_N}{1 + m_{FA}m_N} = \frac{\dfrac{y_1 - p}{x_1} + \dfrac{x_1}{2y_1}}{1 - \left(\dfrac{y_1 - p}{x_1}\right)\left(\dfrac{x_1}{2y_1}\right)} = \frac{2y_1(y_1 - p) + x_1^2}{2y_1x_1 - (y_1 - p)x_1}.$$

y puesto que $x_1^2 = 4py_1$,

$$\tan\beta = \frac{2y_1^2 + 2y_1p}{y_1x_1 + x_1p} = \frac{2y_1}{x_1}.$$

Comparando el resultado obtenido para $\tan\beta$ con la ecuación (5.14), se concluye la demostración.

■

5.4. La función cuadrática de una variable

Como se mencionó al inicio del capítulo las parábolas tiene aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, particularmente las parábolas verticales que suelen ser usadas como modelos matemáticos en diversas áreas del conocimiento. Para esta clase de parábolas, los vértices resultan ser de gran interés ya que son los puntos donde se tiene un valor *máximo* para las que abren hacia abajo o un valor *mínimo* para las abren hacia arriba como se muestra en la Figura (5.9). Por esto, es conveniente contar con un procedimiento analítico para la determinación del vértice de esta clase de parábolas verticales.

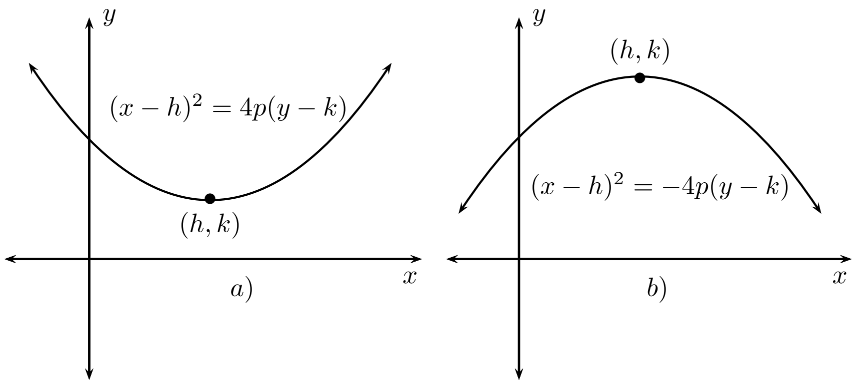

Figura 5.9 Parábolas verticales. Panel izquierdo $a)$, se tiene un punto mínimo en el (h, k). Panel derecho $b)$, se tiene un máximo en (h, k).

Definición 5.4.1 *Una función*[1] *cuadrática de una variable está dada por la ecuación*

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{5.15}$$

donde a, b, c son constantes con $a \neq 0$.

Teorema 5.5 *La función cuadrática*

$$y = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$, representa la ecuación de una parábola vertical con vértice en

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right),$$

Demostración: Dado que $a \neq 0$, podemos dividir con a, obteniendo

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

Puesto que del lado derecho se tiene un término con x^2 y un término con x, podemos sumar $(b/2a)^2$, para completar el binomio cuadrado obteniendo

$$\frac{y}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a},$$

de donde,

$$\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

[1]Dados dos conjuntos A y B, una *función* $y = f(x)$ denotada como $f : A \to B$, es una regla que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.

la cual representa a ecuación de una parábola vertical con vértice en

$$(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right),$$

la forma en se abre, dependerá del signo de a; si $a > 0$, abre hacia arriba y si $a < 0$, abre hacia abajo. ■

EJEMPLO 5.5

Hallar dos números positivos cuyo producto sea máximo y su suma sea 10.
Solución: Sean x, z, dos números tal que $x + z = 10$. Denotando con y su producto se tiene

$$y = xz = x(10 - x) = 10x - x^2.$$

En la ecuación cuadrática se tiene $a = -1$, $b = 10$ y $c = 0$. Puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, la parábola abre hacia abajo. Usando el resultado del Teorema (5.5) se tiene que el vértice es

$$(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) = (5, 25).$$

Así, el vértice representa el punto máximo de la parábola el cual ocurre para $x = 5$ dando como valor máximo $y = 25$. Usando la condición de que la suma es 10, se tiene que los dos números son $x = 5$, $z = 5$.

EJERCICIOS

5.1 Encontrar la ecuación de la directriz, el foco y la longitud del lado recto de la parábola

$$y^2 = \frac{4}{5}x$$

5.2 Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje coincidente con el eje x y con el foco en la parte positiva del eje x.

5.3 Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje coincidente con el eje y y con el foco en la parte negativa del eje y.

5.4 Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, eje coincidente con el eje x y con el foco en la parte negativa del eje x.

5.5 Hallar la ecuación de la parábola con vértice en $(4, 5)$, eje paralelo al eje y y que pasa por el punto $(2, 9)$.

5.6 Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(-4, 0)$, $(-1, 6)$ y $(-1, -2)$.

5.7 Hallar la ecuación de la parábola cuyo lado recto está determinado por los puntos $(2, 4)$ y $(8, 4)$ (dos soluciones).

5.8 Hallar la ecuación de la parábola con foco en $(2, 3)$, lado recto igual a 6 y que abre hacia la izquierda.

5.9 Hallar las ecuaciones de las rectas normal y tangente en punto $(2, 1)$ de la parábola

$$x^2 = 4y.$$

5.10 Hallar la ecuación de la recta tangente con pendiente 2 a la parábola

$$y^2 = 4x.$$

PROBLEMAS

5.1 Demuestre que para un punto $P(x_1, y_1)$ perteneciente a las parábolas horizontales $y^2 = \pm 4px$, la pendiente de la recta tangente es $m_T = y_1/2x_1$, y la pendiente de la recta normal es $m_N = -2x_1/y_1$.

5.2 Usando el resultado del ejercicio anterior muestre que la ecuación de la recta tangente a las parábolas horizontales $y^2 = \pm 4px$, en el punto $P(x_1, y_1)$ está dada por

$$2x_1 y = y_1(x + x_1).$$

5.3 Una estructura de forma parabólica tiene una altura de 20 m y una longitud de la base de 12 m. Encontrar la altura de un punto del arco parabólico que se encuentra a una distancia de 4 m del centro del arco.

5.4 Demuestre que las rectas tangentes, en los extremos del lado recto de la parábola, son perpendiculares.

5.5 Hallar la ecuación de la parábola con vértice en $V(0, -1)$, que pasa por el punto $P(0, 3)$ y que abre a la derecha.

5.6 Considere la familia de rectángulos de igual perímetro L. ¿Cuál es el rectángulo de mayor área?

5.7 Demostrar que dado un perímetro fijo el rectángulo de mayor área es un cuadrado.

5.8 Hallar la ecuación de la parábola con foco en $F(6, -1)$ y directriz la recta $x - 1 = 0$.

5.9 Hallar la ecuación de la parábola que abre hacia abajo y que pasa por los puntos $(1, -2)$, $(2, 1)$ y $(3, -1)$.

CAPÍTULO 6

LA ELIPSE

La ecuación de la elipse, como modelo matemático, es fundamental para analizar el movimiento de los planetas alrededor del Sol así como para calcular las órbitas de los satélites artificiales.

6.1. Ecuación de la elipse con centro en $(0,0)$

Definición 6.1.1 *Una* elipse *es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x,y)$ de un plano tales que, la suma de las distancias a otros dos puntos fijos que no pertenecen a la elipse es una cantidad constante. Los puntos fijos se llaman focos.*

En la Figura (6.1) se muestra la gráfica de una elipse con centro en el origen y los focos F_1 y F_2. La gráfica corta a cada uno de los ejes coordenados en dos puntos. Sean los $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$ las coordenadas de los focos y sea $2a$ la cantidad constante. Con esto, la ecuación de la elipse se establece en el siguiente

Teorema 6.1 *La elipse con centro en $(0,0)$, focos en $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$ y cantidad constante $2a$ tiene por ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6.1}$$

donde

$$b^2=a^2-c^2.$$

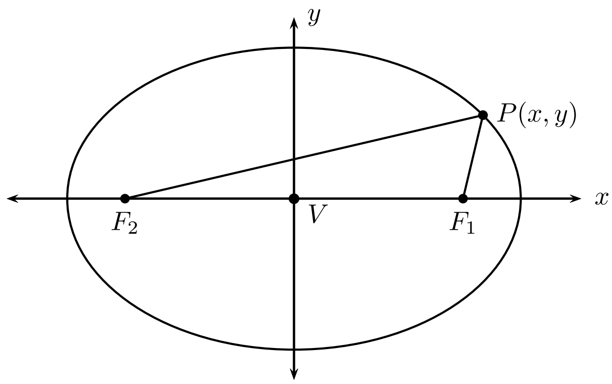

Figura 6.1 Elipse con centro en $(0, 0)$, y semieje mayor a y semieje menor b.

Demostración: Para un punto $P(x, y)$ en la elipse se tiene, de la definición (6.1.1)

$$| F_1P | + | F_2P |= 2a \tag{6.2}$$

donde,

$$| F_1P |= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \text{y} \quad | F_2P |= \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Transponiendo el segundo término del lado derecho de la ecuación (6.2) y elevando al cuadrado

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

simplificando y despejando el término con el radical

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+xc$$

elevando al cuadrado ésta expresión y simplificando

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Usando la ecuación (6.2), se tiene que el punto de corte de la elipse con la parte positiva del eje x tiene coordenadas $(a, 0)$. Con este resultado; $a > c$ de donde, $a^2 - c^2 > 0$. Por tanto, el término $a^2 - c^2$ se puede escribir como $b^2 = a^2 - c^2$. Así,

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$$

dividendo con a^2b^2, se obtiene la ecuación (6.1).

■

Elementos de la elipse: La recta que contiene a los focos se llama *eje focal*. Al segmento del eje focal comprendido en su intersección con la elipse se llama *eje mayor* y tiene longitud $2a$. La recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro se llama *eje normal*. Al segmento del eje normal comprendido en su intersección con la elipse se llama *eje menor* y tiene longitud $2b$. Al segmento de recta perpendicular al eje mayor que pasa por alguno de los focos y están comprendido en su intersección con la elipse se llaman *lado recto*. La elipse tiene dos lados rectos. Los *vértices* son los puntos de intersección del eje focal con la elipse y se encuentran en $(-a,0)$ y en $(a,0)$. En la Figura (6.2) se muestran los elementos de la elipse con centro en el origen y eje focal sobre el eje x.

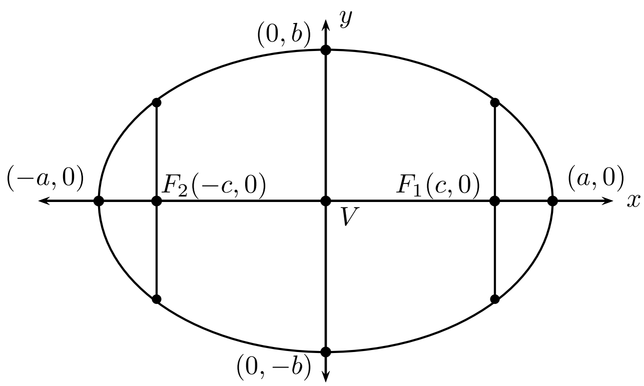

Figura 6.2 Elipse con centro en $(0,0)$, y semieje mayor a y semieje menor b.

Despejando y de la ecuación (6.1) se obtiene

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{6.3}$$

I nspeccionando la ecuación (6.3), los valores que puede tomar x, quedan restringido de acuerdo con

$$a^2 - x^2 \geq 0 \quad \text{o} \quad -a \leq x \leq a.$$

Ahora, para calcular la longitud de uno de los lados rectos de la elipse, se toma la recta perpendicular al eje mayor $x = c$, que pase por el foco F_1 y se encuentran los punto de corte con la elipse. Así,

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \pm\frac{b^2}{a}$$

por lo que los puntos de corte son $(c, b^2/a)$ y $(c, -b^2/a)$. Con esto la longitud del lado recto es simplemente el valor absoluto de la diferencia entre las ordenadas, es decir, $2b^2/a$. Un elemento característico de la elipse es la excentricidad dada por

$$e = \frac{c}{a},$$

puesto que $c < a$, la excentricidad e, de una elipse cumple con

$$0 < e < 1.$$

EJEMPLO 6.1

Dada la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

hallar su excentricidad, longitud del lado recto y las coordenadas de sus focos.

Solución: La elipse tiene semieje mayor $a = 3$ y semieje menor $b = 2$. Con esto su distancia focal es

$$c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5},$$

por lo que su excentricidad es $e = \sqrt{5}/3$. La longitud de su lado recto es

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(2^2)}{3} = \frac{8}{3}.$$

Sus vértices están en los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ y sus focos tienen por coordenadas $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$.

Cuando la elipse es tal que su eje mayor coincide con el eje de las ordenadas y el eje menor con el de las abscisas su ecuación esta dada por el siguiente

Teorema 6.2 *La elipse con centro en* $(0, 0)$*, semieje mayor* a *sobre el eje de las ordenadas y semieje menor* b *sobre el eje de las abscisas, tiene por ecuación*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{6.4}$$

Demostración: Esta se deja al lector ver problema (6.1). ■

6.2. Ecuación de la elipse con centro en (h, k)

Si ahora el centro de la elipse está en las coordenadas (h, k) éstas, se toman como el centro de un nuevo sistemas de ejes coordenados (x', y'). Así, se tienen las siguientes ecuaciones que relacionan los dos sistemas coordenados

$$x' = x - h, \quad y' = y - k,$$

Considerando estas relaciones entre ambos sistemas coordenados la ecuación de una elipse con centro en (h, k) se establece mediante el siguiente

Teorema 6.3 *Considere el punto* (h, k) *como el centro de una elipse. Entonces*

i) Si el eje focal es paralelo al eje x *la elipse tiene por ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6.5}$$

ii) Si el eje focal es paralelo al eje y *la elipse tiene por ecuación*

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6.6}$$

donde las longitudes de los semiejes mayor (a) *y menor* (b) *están relacionados con la distancia del centro al foco* (c) *mediante*

$$a^2 = b^2 + b^2.$$

Se deja al lector la demostración del teorema, ver problema (6.2).

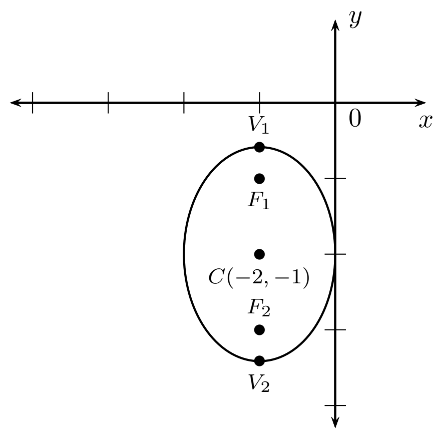

Figura 6.3 Elipse con centro en $(-1,-2)$, semieje mayor $a = \sqrt{2}$ y semieje menor $b = 1$.

EJEMPLO 6.2

Hallar la ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje y, que tiene un foco arriba del centro en $(-1,-1)$, excentricidad igual a $1/\sqrt{2}$ y lado recto igual a $\sqrt{2}$.
Solución: Puesto que el eje focal es paralelo al eje y la ecuación es de la forma (6.6). Así,

$$\frac{(y+1)^2}{a^2} + \frac{(x+1)^2}{b^2} = 1.$$

Considerando las relaciones entre los semiejes y la distancia del centro al foco

$$b^2 + c^2 = a^2$$

dividiendo con a^2 y usando que $e = c/a$

$$1 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

de donde, $2b^2 = a^2$. Puesto que el lado recto es $\sqrt{2}$ se tiene $a = \sqrt{2}$, por lo que $c = b = 1$. Como el eje focal es paralelo al eje y y las coordenadas de un foco, con coordenadas $(-1,-1)$, está arriba del centro entonces las coordenadas del centro son $(-1,-2)$ y las coordenadas del otro foco son $(-1,-3)$. El la Figura (6.3) se muestra la gráfica de la elipse y su ecuación es

$$(x+1)^2 + \frac{(y+2)^2}{2} = 1.$$

Las circunferencias pueden ser vistas como un caso particular de las elipses cuando sus semiejes son iguales, $a = b$. En este caso particular la excentricidad de la circunferencia es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 0$$

y su correspondiente lado recto, $2b^2/a$, coincide con el diámetro.

EJERCICIOS

6.1 Hallar la ecuación de la elipse con vértices en $(0,-4)$, $(0,4)$ y focos en $(0-3)$, $(0,3)$.

6.2 Dada la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1.$$

hallar las coordenadas de los vértices, focos, la excentricidad, la longitud de un lado recto y trazar su gráfica.

6.3 Hallar la ecuación de la elipse con focos en $(0,-5)$, $(0,5)$ y excentricidad igual a $5/6$.

6.4 Dada la ecuación de la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1.$$

hallar las coordenadas de los vértices, focos, la excentricidad, la longitud de un lado recto y trazar su gráfica.

6.5 Hallar la ecuación de la elipse con centro en $(1,3)$, uno de los vértices en $(-2,3)$ y con excentricidad igual a $1/3$.

6.6 Hallar el lugar geométrico de los puntos (x,y) tales que el producto de sus pendientes a dos puntos fijos $(3,2)$ y $(-3,3)$ es igual a -3.

PROBLEMAS

6.1 Demuestre el teorema (6.2).

6.2 Demuestre el teorema (6.3).

6.3 Dos elipses E_1 y E_2 con semiejes $\{a_1, b_1\}$ y $\{a_2, b_2\}$ se dice que son *proporcionales* si cumplen con

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Demostrar que si las excentricidades de ambas elipses son iguales entonces las elipses son proporcionales.

6.4 Considere los puntos $A(1, 1)$, $B(3, -3)$. Hallar el lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ tal que el producto de la pendiente del segmento AP por la pendiente del segmento BP es igual a -2.

6.5 Hallar la ecuación de elipse con centro en $(0, 0)$, eje mayor sobre el eje x y que pasa por los puntos $(2, 0)$ $(0, 3)$ y $(1, 3\sqrt{3}/2)$.

6.6 Demostrar que el eje menor es igual a la media proporcional del eje mayor y del lado recto.

6.7 La Tierra tiene una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos. Considere que el semieje mayor de la órbita es 149.5 millones de km y que la excentricidad de la órbita es 0.017. Hallar la máxima y mínima distancia de la Tierra al Sol.

6.8 Una estructura en forma de arco semielíptica tiene una longitud de 6 m en la base y 8 m de altura. Hallar la altura del arco para un punto situado a 2 m del centro.

CAPÍTULO 7

LA HIPÉRBOLA

La relación entre la presión y el volumen de un gas ideal es descrita por la ecuación de una hipérbola. En otra de sus aplicaciones las superficies hiperbólicas son usadas en la construcción de instrumentos astronómicos como los telescopios, así como en el diseño de antenas de radiofrecuencias.

7.1. Ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$

De forma similar al estudio de las otras cónicas se inicia el capítulo con la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, se encuentra su ecuación y se discute sobre sus elementos y características. Posteriormente se encuentra la ecuación de la hipérbola cuando su centro tiene las coordenadas $(h.k)$. A diferencia de las otras cónicas el lugar geométrico de la hipérbola consta de dos *ramas* que se abren indefinidamente ya sea lateral o verticalmente.

Definición 7.1.1 *Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal forma que el valor absoluto de las diferencias de sus distancias a dos puntos fijos del plano, F_1 y F_2, es siempre igual a una constante que se representa por $2a$ y es menor que la distancia entre F_1 y F_2.*

En la Figura (7.1) se muestra la gráfica de las dos ramas de una hipérbola con centro en el origen. Los puntos fijos se llaman *focos*. Igual que con la elipse, el *eje focal* es la recta que pasa por los focos. El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos llamados *vértices* con coordenadas $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Se muestra también la posición de sus focos $F_1(c, 0)$ y

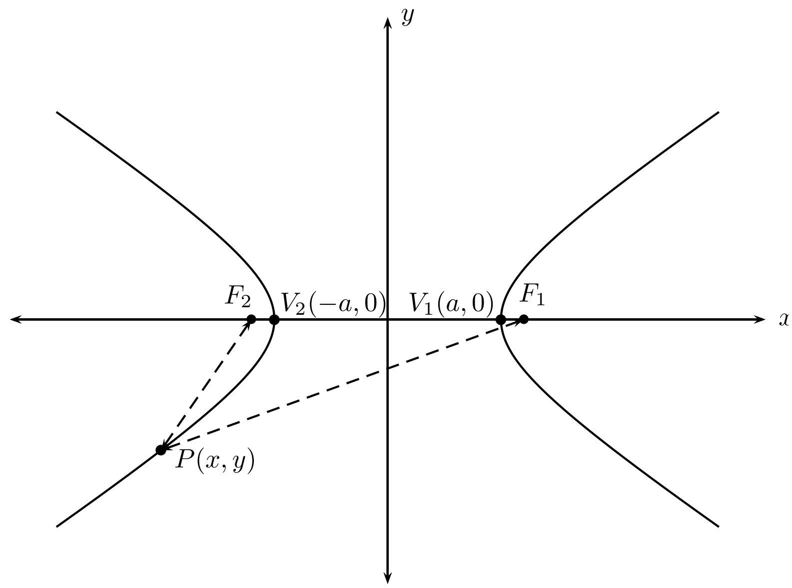

Figura 7.1 Hipérbola con centro en $(0,0)$, y semieje mayor a y semieje menor b.

$F_2(-c,0)$ y se tiene $c > a$. De acuerdo con la definición (7.1.1) la ecuación de la hipérbola está dada por el siguiente

Teorema 7.1 *La ecuación de la hipérbola con centro en el origen, focos en* $(c,0)$, $(-c,0)$ *y con intersección con el eje* x *en los puntos* $(-a,0)$ *y* $(a,0)$ *es*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.1}$$

donde

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Demostración: Para un punto $P(x,y)$ en la hipérbola se tiene, de la definición (7.1.1)

$$\mid (\mid F_1P \mid - \mid F_2P \mid) \mid = 2a \tag{7.2}$$

donde,

$$\mid F_1P \mid = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \mid F_2P \mid = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

La ecuación(7.2) implica

$$\mid F_1P \mid - \mid F_2P \mid = 2a \tag{7.3}$$

$$\mid F_1P \mid - \mid F_2P \mid = -2a \tag{7.4}$$

La ecuación (7.3) es valida para puntos en la rama del lado izquierdo del eje y, mientras que la ecuación (7.4) es para puntos en la rama del lado derecho del eje y. Usando, como referencia, la gráfica de la Figura (7.1) y su correspondiente ecuación (7.3), se transpone el segundo término del lado izquierdo y elevando al cuadrado

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

simplificando y despejando el término con el radical

$$-a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc$$

elevando al cuadrado y simplificando

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Como $c>a$ entonces $c^2-a^2>0$. Por tanto, el término c^2-a^2 se puede escribir como $b^2=c^2-a^2$. Así,

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

dividendo con a^2b^2 se obtiene la ecuación (7.1). ■

Elementos de la hipérbola: La ecuación (7.1) se conoce como la ecuación canónica de la hipérbola. En la ecuación (7.1) las potencias de x, y son pares por lo que la gráfica es simétrica respecto de los ambos ejes coordenados y del origen. El segmento de recta en el eje focal comprendido entre los vértices (V_2V_1) se llama *eje transverso o eje real*). El punto medio del eje transverso se llama *centro de la hipérbola*. La recta perpendicular al eje transverso que pasa por el centro se llama *eje normal*. El segmento del eje normal de longitud $2b$ (B_2B_1) con punto medio el centro de la hipérbola se llama *eje imaginario o eje conjugado*. De forma similar a la elipse se define la excentricidad e como

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1.$$

Un segmento de recta uniendo dos puntos cualesquiera de la hipérbola se llama *cuerda* (A_2A_1). Si la cuerda pasa por alguno de los focos se llama *cuerda focal* (D_2D_1). La cuerda focal perpendicular al eje focal se llama *lado recto* (E_2E_1). Una cuerda que pasa por el centro de la hipérbola se llama diámetro (D_2D_3). En la Figura (7.2) se muestran los elementos de la hipérbola dada por la ecuación (7.1). La longitud del lado recto se puede calcular usando sus características. Considere el lado recto que pasa por el foco $F_1(c,0)$. Puesto que el lado recto es perpendicular al eje focal entonces el lado recto esta comprendido en la recta $x=c$. Sustituyendo en la ecuación(7.1)

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Resolviendo para y

$$y=\pm\frac{b^2}{a}.$$

Así, los puntos de corte de la recta $x=c$ con la hipérbola dada por la ecuación (7.1) son $(-b^2/a,c)$ y $(b^2/a,c)$. Por tanto la longitud del lado recto es $2b^2/a$.

EJEMPLO 7.1

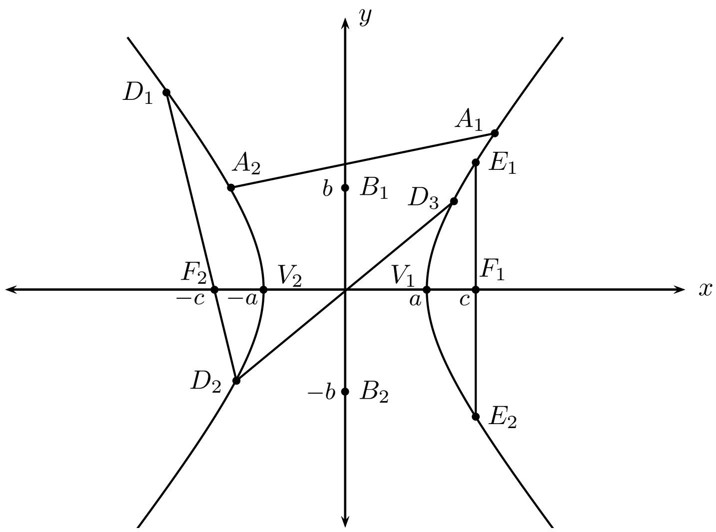

Figura 7.2 Elementos de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, y semieje transverso a y semieje conjugado b.

Hallar las coordenadas de los focos, vértices, longitud del lado recto y bosquejar la gráfica de la hipérbola dada por la ecuación

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

Solución: Expresando la ecuación de la hipérbola de la forma de la ecuación (7.1)

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Así, $a = 4$ y $b = 3$, por lo que

$$c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Con esto los focos tiene coordenadas $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Los vértices se encuentran con los cortes de la gráfica con alguno de los ejes. En este caso no se tiene corte con el eje y; si $x = 0$ se tiene

$$-\frac{y^2}{9} = 1.$$

Por tanto, el corte es con el eje x y las coordenadas de los vértices son $(-4, 0)$ y $(4, 0)$. La longitud del lado recto es

$$2\frac{b^2}{a} = \frac{9}{2}.$$

La gráfica se muestra en la Figura (7.3).

A diferencia de las elipses donde la orientación está determinada por la relación entre los parámetros a y b, para las hipérbolas se tiene que si a es mayor o menor que b esto, no es determinante para su orientación. La orientación de las hipérbolas está determinada por

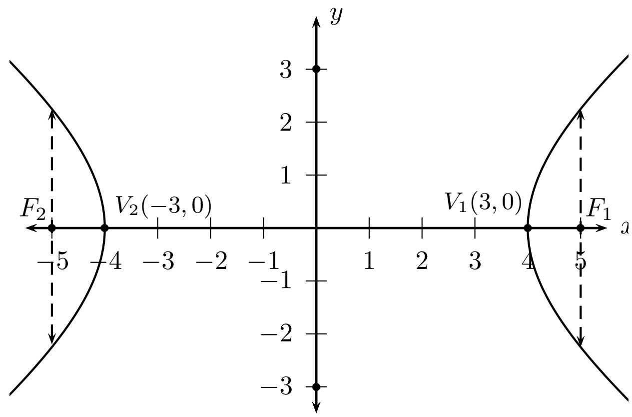

Figura 7.3 Hipérbola con centro en $(0,0)$ y eje transverso 8 y eje conjugado 6.

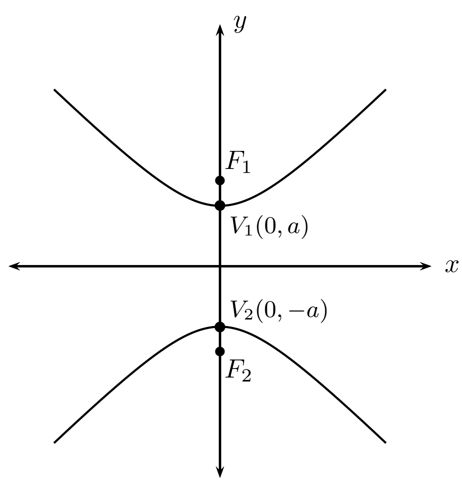

Figura 7.4 Hipérbola con centro en $(0,0)$ y focos en $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$.

el variable que tiene el signo positivo. Si x^2 tiene el signo positivo entonces se tiene una hipérbola con ramas que se abren horizontalmente. Si es y^2 la que tiene el signo positivo entonces la hipérbola tiene ramas que se abren verticalmente como se muestra en la Figura (7.4). Se deja al lector (ver problema (7.1)) la demostración del siguiente

Teorema 7.2 *La ecuación de la hipérbola con centro en el origen, focos en* $(0,c)$, $(0,-c)$ *y con intersección con el eje* y *en los puntos* $(0,a)$ *y* $(0,-a)$ *es*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{7.5}$$

donde

$$b^2 = c^2 - a^2$$

La gráfica de una hipérbola dada por la ecuación (7.5) se muestra en la Figura (7.4).

7.2. Ecuación de la hipérbola con centro en (h, k)

Las ecuaciones de las hipérbolas con centro en (h, k) quedan establecidas en el

Teorema 7.3 *Considere el punto (h, k) como el centro de una hipérbola. Entonces*

i) Si el eje focal es paralelo al eje x la hipérbola tiene por ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{7.6}$$

ii) Si el eje focal es paralelo al eje y la hipérbola tiene por ecuación

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \tag{7.7}$$

donde las longitudes de los semiejes transverso (a) y conjugado (b) están relacionados con la distancia del centro al foco (c) mediante

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

La demostración es directa usando traslación de ejes de manera que, el centro (h, k) sea el el origen del sistema de coordenadas (x', y'). Se deja al lector la demostración del teorema (ver problema(7.2)).

Para las hipérbolas dadas por la ecuación (7.6) se tiene que las coordenadas de los vértices y los focos están dadas por

$$\begin{aligned} V_1 =& (h+a, k) \\ V_2 =& (h-a, k) \\ F_1 =& (h+c, k) \\ F_2 =& (h-c, k) \end{aligned}$$

Mientras que para las hipérbolas dadas por la ecuación (7.7) se tiene

$$\begin{aligned} V_1 =& (h, k+a) \\ V_2 =& (h, k-a) \\ F_1 =& (h, k+c) \\ F_2 =& (h, k-c) \end{aligned}$$

EJEMPLO 7.2

Para la hipérbola dada por la ecuación

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$$

hallar: el centro, los focos y los vértices.

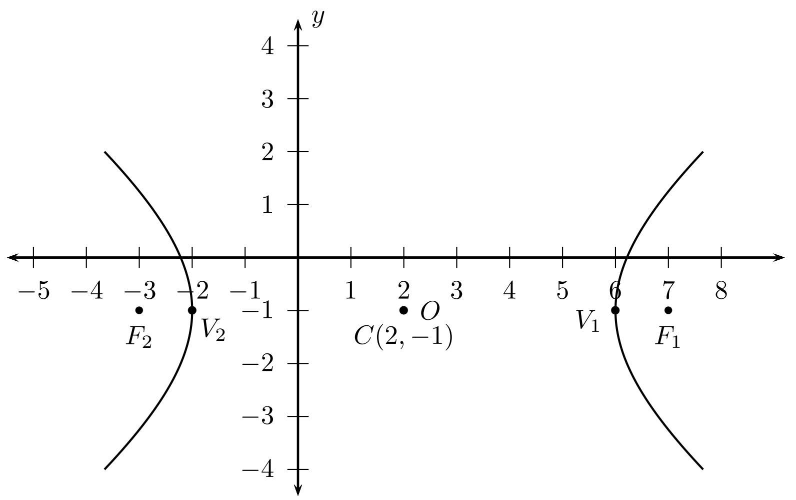

Figura 7.5 Hipérbola con centro en $(2, -1)$, vértices en $(-2, -1)$ y $(6, -1)$

.

Solución: Transponiendo el término constante y completando los cuadrados

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

la cual se puede escribir de la forma de la ecuación (7.6)

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Así, la hipérbola se abre lateralmente y las coordenadas del centro son: $(2, -1)$. Como $a = 4$, $b = 3$ entonces $c = 5$. Por lo que las coordenadas de los vértices son

$$\begin{aligned} V_1 =& (h+a, k) = (2+4, -1) = (6, -1) \\ V_2 =& (h-a, k) = (2-4, -1) = (-2, -1). \end{aligned}$$

Las coordenadas de los focos son

$$\begin{aligned} F_1 =& (h+c, k) = (2+5, -1) = (7, -1) \\ F_2 =& (h-c, k) = (2-5, -1) = (-3, -1). \end{aligned}$$

La grafica de la hipérbola se muestra en la Figura (7.5).

7.3. Asíntotas de la hipérbola

Un hipérbola dada por la ecuación (7.1), consta de dos ramas que se abren lateralmente. La forma en que van creciendo ambas ramas está acotada por dos rectas que pasan por su centro; tales rectas son las asíntotas de la hipérbola y están determinadas de acuerdo con el siguiente

Teorema 7.4 *La hipérbola con centro en el origen dada por la ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tiene por asíntotas a las rectas

$$\begin{aligned} bx + ay &= 0, \\ bx - ay &= 0. \end{aligned}$$

Demostración: Se probará que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota. La demostración para la recta $bx - ay = 0$ es análoga. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto de la hipérbola en la rama superior izquierda como se muestra en la Figura (7.6). Usando la expresión para la determinar la

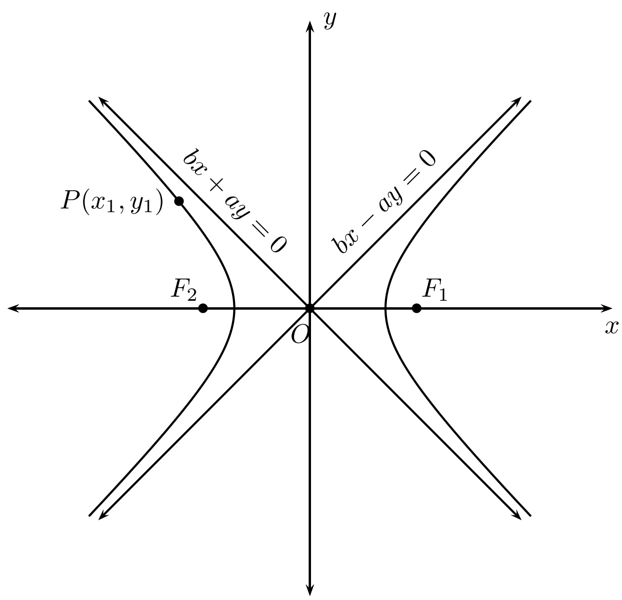

Figura 7.6 Asíntotas de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = 1$.

distancia de un punto a una recta

$$d = \frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Multiplicando con el binomio conjugado del numerador

$$d = \frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{|bx_1 - ay_1|}{|bx_1 - ay_1|} = \frac{\left|b^2x_1^2 - a^2y_1^2\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}|bx_1 - ay_1|} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}|bx_1 - ay_1|}.$$

Así, cuando $P(x_1, y_1)$ se aleja del origen y toma valores positivos grandes y x toma valores negativos grandes por lo que

$$|bx_1 - ay_1| = b\,|x_1| + ay_1.$$

Si el punto se encuentra en la parte inferior de la rama derecha de la hipérbola, cuando el punto se aleja del origen y toma valores negativos grandes y x toma valores positivos grandes por lo que

$$|bx_1 - ay_1| = bx_1 + a\,|y_1|\,.$$

Así, en ambos casos, al alejarse el punto del origen el denominador aumenta infinitamente por lo que la distancia tiende a cero. Por lo tanto, la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la hipérbola. La demostración de que la recta $bx + ay = 0$ es también una asíntota de la hipérbola, es completamente análoga y se deja como problema (ver problema (7.6). ■

Para las hipérbolas verticales se tiene un resultado similar y está dado por el

Teorema 7.5 *La hipérbola con centro en el origen dada por la ecuación*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

tiene por asíntotas a las rectas

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ ax - by &= 0. \end{aligned}$$

Demostración: La demostración es análoga al caso de las hipérbolas horizontales. ■

Si la hipérbola tiene centro en (h, k), entonces las asíntotas están dadas por el siguiente

Teorema 7.6 *Las hipérbolas con centro en* (h, k) *dada por laz ecuaciones*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{7.8}$$

y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{7.9}$$

tiene por asíntotas, para la hipérbola dada por la ecuación(7.8), a las rectas

$$\begin{aligned} b(x-h) + a(y-k) &= 0 \\ b(x-h) - a(y-k) &= 0, \end{aligned}$$

y para la hipérbola dada por la ecuación(7.9), a las rectas

$$\begin{aligned} a(x-h) + b(y-k) &= 0 \\ a(x-h) - b(y-k) &= 0. \end{aligned}$$

Demostración: La demostración se sigue de una traslación de ejes, donde el punto (h, k) es el origen del nuevo sistema de coordenadas (x', y'). ■

EJEMPLO 7.3

Hallar las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y+2)^2 = 1.$$

Solución: La hipérbola se corresponde con la ecuación (7.8), con a $a = 2$, $b = 1$. Por tanto las ecuaciones de sus asíntotas son

$$\begin{aligned} l_1 &: (x+1) - 2(y+2) = x - 2y - 3 = 0 \\ l_2 &: (x+1) + 2(y+2) = x + 2y + 5 = 0. \end{aligned}$$

La hipérbola y sus asíntotas se muestran en la Figura (7.7).

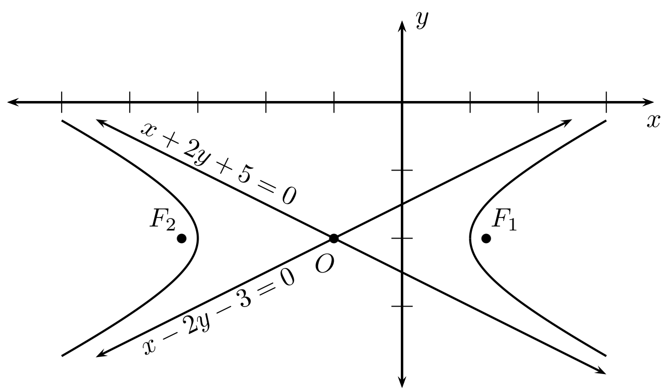

Figura 7.7 Asíntotas de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = 1$.

EJERCICIOS

7.1 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen que tiene su eje focal sobre el eje x y que pasa por los puntos $(4, \sqrt{3})$ y $(-6, \sqrt{8})$.

7.2 Hallar las coordenadas de los focos, vértices, longitud del lado recto y excentricidad de la hipérbola dada por la ecuación

$$5y^2 - 9x^2 = 36.$$

7.3 Hallar las coordenadas de los focos, vértices, longitud del lado recto y excentricidad de la hipérbola dada por la ecuación

$$9x^2 - 4x^2 = 36.$$

7.4 Halla la ecuación de la hipérbola con centro en el origen eje transverso sobre el eje y, excentricidad $2\sqrt{3}$ y longitud de su lado recto igual a 18.

7.5 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, excentricidad igual a $\sqrt{13}/3$, eje focal en el eje x y que pasa por el punto $(3\sqrt{3}/2, \sqrt{2})$.

7.6 Dada la ecuación de la hipérbola

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} =$$

Determine las coordenadas de sus vértices y focos así como las ecuaciones de sus asíntotas.

7.7 Los vértices de una hipérbola son los puntos $(3, 3)$ y $(-3, 3)$, si su excentricidad es $5/2$ hallar su ecuación y las coordenadas de sus focos.

PROBLEMAS

7.1 Pruebe el Teorema (7.2).

7.2 Pruebe el Teorema (7.3).

7.3 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancia de los puntos fijos $(-4, 0)$, $(4, 0)$ sea igual a 6.

7.4 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que su distancia al punto fijo $(1, 0)$ es igual a $\sqrt{3}$ veces la distancia del punto a la recta $x = 1/3$.

7.5 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que el producto de sus distancias a las rectas $3y - 4x = 0$; $3y + 4x = 0$ sea $36/25$.

7.6 Demostrar que la recta $bx - ay = 0$ es una asíntota de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

7.7 Para la hipérbola dada por la ecuación

$$x^2 - y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$$

hallar las coordenadas del centro, vértices, focos, excentricidad y las ecuaciones de sus asíntotas.

7.8 Sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demuestre que el producto de las distancias del punto $P(x, y)$ a cada una de sus asíntotas es igual a $a^2b^2/\sqrt{a^2 + b^2}$.

CAPÍTULO 8

COORDENADAS POLARES

Hasta ahora, las coordenadas cartesianas han sido de gran utilidad en la solución de diversos problemas geométricos y de aplicaciones, como en el caso de las ecuaciones cuadráticas (parábolas) cómo modelos matemáticos. Sin embargo, en algunas ocasiones es conveniente usar otro tipo de coordenadas para modelar y resolver problemas con el enfoque analítico. Puesto que se trata de situaciones en dos dimensiones es necesario usar dos cantidades independientes para ubicar un punto en el plano. En el caso de coordenadas cartesianas el punto (x, y), queda especificado con las distancias del punto a los ejes. En este capítulo se iniciará el estudio de otro sistema de coordenadas, las *coordenadas polares* (r, θ).

8.1. Plano Polar

En este sistema de coordenadas se tiene una semirrecta llamada *eje polar* cuyo origen es un punto fijo O llamado *polo*. La segunda coordenada es angular y se mide a partir del eje polar en sentido antihorario. Así, un punto P se puede localizar en el *plano polar* conociendo la distancia r del polo al punto y el ángulo θ que se forma con el eje polar y el segmento OP, como se muestra en la Figura (8.1). Las coordenadas de un punto en el plano polar se denotan con (r, θ). El eje polar es horizontal y el ángulo θ se mide usualmente, se mide en radianes. La distancia r, es medida del polo O al punto. Del polo y perpendicular al eje polar se tiene el *eje a* $90°$. La distancia r se conoce también como *radio vector* y el ángulo θ como el *argumento* del punto. Dada las coordenadas (r, θ) se

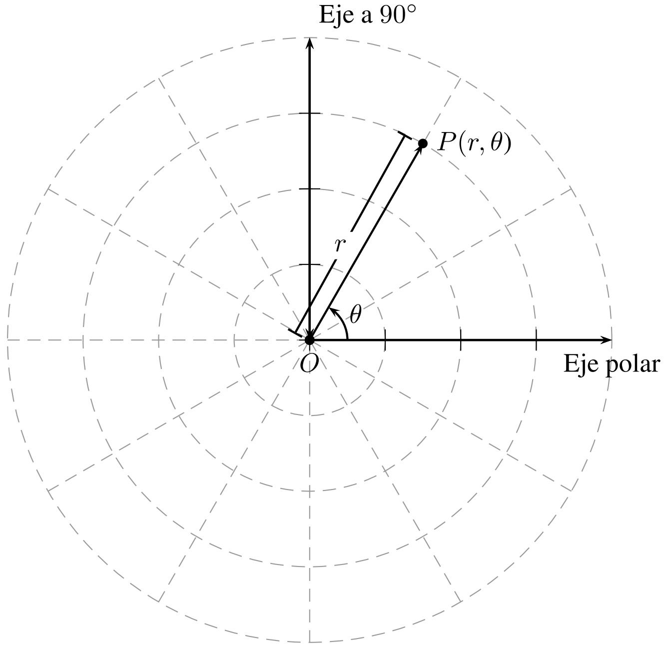

Figura 8.1 Ubicación de un punto $P(r, \theta)$ en el plano polar.

tiene que le corresponde un único punto en plano polar. Sin embargo, dado un punto en el plano polar a éste le corresponden un número infinito de pares de coordenadas dadas por $(r, \theta + 2n\pi)$, donde n es un número entero. Por esto, se toma el criterio de considerar el valor del argumento en el rango

$$0 \leq \theta < 2\pi.$$

En el sistema de coordenadas cartesianas, rectas paralelas a los ejes producen una malla rectangular. En coordenadas polares, la malla se genera con semirrectas que parten radialmente del polo y circunferencias concéntricas centradas en el polo como se muestra en la Figura (8.2). En este plano polar se han graficado algunas semirrectas las cuales están espaciadas $\pi/6$ radianes. El espaciamiento de las circunferencias concéntricas es de una unidad. Así, dadas las coordenadas (r, θ) de un punto, este se puede localizar recorriendo la distancia r a lo largo del eje polar y luego mover el radio vector en sentido antihorario hasta lograr la apertura del ángulo θ con el radio vector y el eje polar.

EJEMPLO 8.1

Ubicar los los puntos $A(3, \pi/3),\ B(2.5, 3\pi/4)$ en el plano polar.
Solución: Los puntos A y B se pueden observar en la Figura (8.3).

8.2. Transformación de coordenadas polares a rectangulares y viceversa

Puesto que los sistemas de coordenadas rectangulares y polares describen puntos en un plano mediante pares de coordenadas (dos cantidades independientes), es posible encontrar

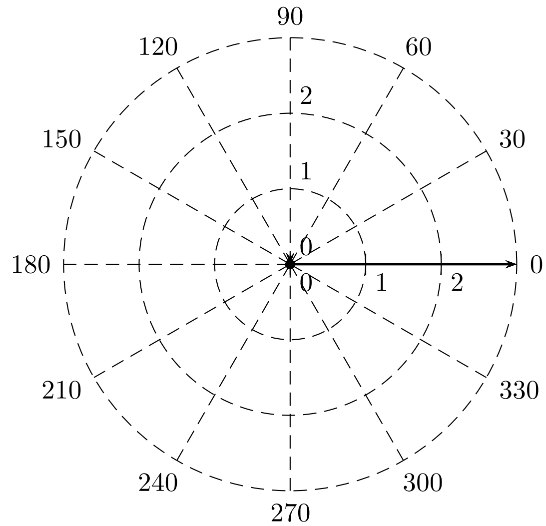

Figura 8.2 Malla en el plano polar generada por semirrectas que parten del polo y círculos concéntrico, entrados en el polo.

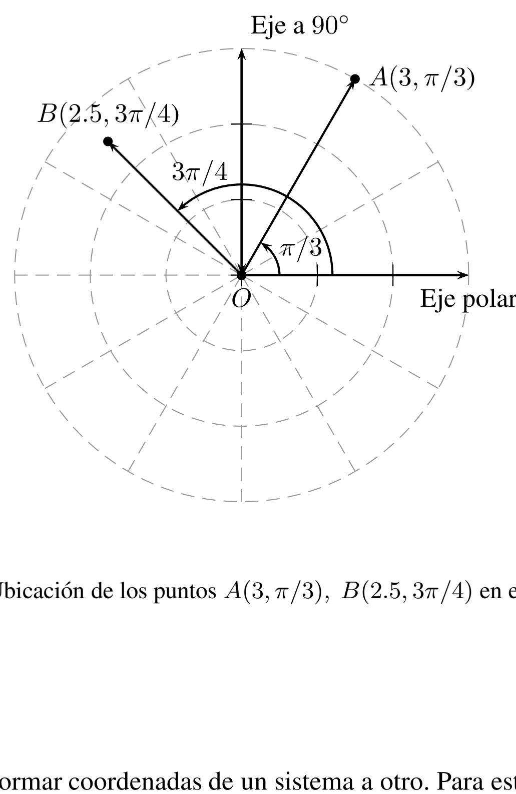

Figura 8.3 Ubicación de los puntos $A(3, \pi/3),\ B(2.5, 3\pi/4)$ en el plano polar.

relaciones para transformar coordenadas de un sistema a otro. Para esto, se hace coincidir el polo con el origen $(0, 0)$ de las coordenadas cartesianas y el eje de las x positivas coincidente con el eje polar. Así, un punto (r, θ) tendrá también las coordenadas cartesianas (x, y) Como se muestra en la Figura (8.4).

De acuerdo con la Figura (8.4), si para un punto en el plano se conocen sus coordenadas polares (r, θ), entonces sus coordenadas cartesianas se pueden obtener mediante

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Si ahora, lo que se conoce son las coordenadas cartesianas (x, y), de un punto en el plano sus coordenadas polares (r, θ), se pueden obtener mediante

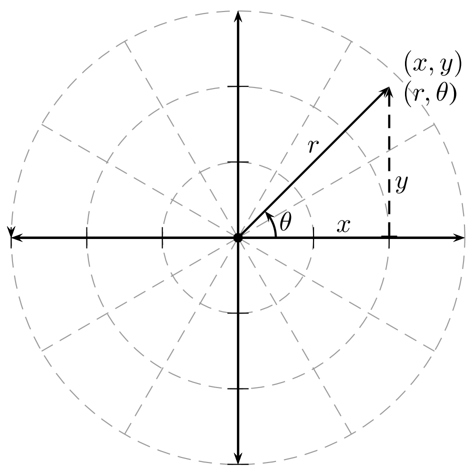

Figura 8.4 Ubicación de un punto en un plano usando coordenadas polares y rectangulares.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

EJEMPLO 8.2

Transformación de coordenadas polares a rectangulares y viceversa.

a) Hallar las coordenadas polares del punto $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$.

b) Hallar las coordenadas cartesianas del punto $(r, \theta) = (4, 5\pi/4)$.

Solución:

a) Transformando de coordenadas (x, y) a (r, θ) se tiene

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

b) Transformando de coordenadas (r, θ) a (x, y) se tiene

$$
\begin{aligned}
x =& 4\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \\
y =& 4\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones de transformación entre ambos sistemas de coordenadas pueden ser usadas para, dada una ecuación de un lugar geométrico en coordenadas cartesianas, obtener la ecuación del lugar geométrico en coordenadas polares. Recíprocamente, dada la ecuación de un lugar geométrico en coordenadas polares, obtener su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 8.3

Considere la ecuación de la circunferencia con centro en $(2, 3)$ y de radio 2 en coordenadas cartesianas. Encuentre su ecuación en coordenadas polares.
Solución: La ecuación en coordenadas cartesianas es

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4.$$

Usando las ecuaciones de transformación

$$(r\cos\theta - 2)^2 + (r\operatorname{sen}\theta - 3)^2 = 4.$$

Desarrollando los binomios y usando

$$r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2,$$

se tiene que la ecuación de en coordenadas polares es

$$r^2 - 4r\cos\theta - 6r\operatorname{sen}\theta + 9 = 0.$$

EJEMPLO 8.4

Dada la ecuación

$$r = \operatorname{sen}^2\theta$$

encontrar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas.
Solución: Multiplicando con r^2

$$r^3 = r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

en términos de coordenadas cartesianas

$$(x^2 + y^2)^{3/2} = y^2.$$

8.3. Distancia entre dos puntos y ecuación de la recta en coordenadas polares

8.3.1. Distancia entre dos puntos en coordenadas polares

De forma análoga al desarrollo en coordenadas cartesianas se aborda una de las principales herramientas de la geometría analítica; el cálculo de distancias dado en el siguiente

Teorema 8.1 *Considere los puntos $A(r_A, \theta_A)$ y $B(r_B, \theta_B)$, como se muestra en la Figura (8.5). la distancia entre los dos puntos está dada por*

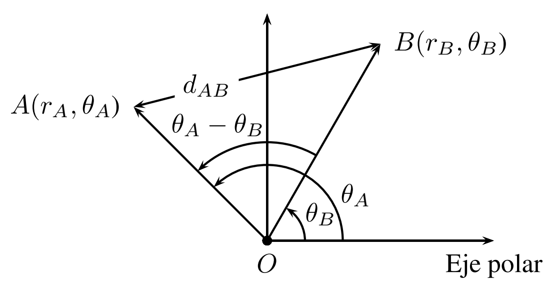

Figura 8.5 Cálculo de la distancia entre los puntos $A(r_A, \theta_A)$ y $B(r_B, \theta_B)$.

$$d_{AB} = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\theta_A - \theta_B)} \tag{8.1}$$

Demostración: Considere el triángulo que se forma con el polo y los puntos A y B. Usando la *ley de los cosenos* para el lado AB que tiene como ángulo opuesto $\theta_A - \theta_B$ se tiene

$$d_{AB}^2 = r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\theta_A - \theta_B). \tag{8.2}$$

Tomando raíces se completa la demostración ■

EJEMPLO 8.5

Calcular la distancia entre los puntos $A(2, 5\pi/12)$ y $B(5, \pi/12)$.
Solución Usando la ecuación (8.2)

$$d_{AB} = \sqrt{2^2 + 5^2 - 2(2)(5)\cos(5\pi/12 - \pi/12)} = \sqrt{29 - 20\cos(\pi/3)} = \sqrt{19}.$$

8.3.2. Ecuación de la recta en coordenadas polares

se iniciará con la ecuación de la recta que pasa por el polo. Seguidamente, se continuará con las ecuaciones de las rectas perpendicular y paralela al eje polar. Finalmente se obtendrá la ecuación de la recta que no cae en los casos anteriores. Al igual que en coordenadas cartesianas, le ecuación de la recta que pasa por el polo tiene una forma sencilla dada por

$$\theta = k, \tag{8.3}$$

donde k, es un valor constante que determina la inclinación de la recta respecto del eje polar. En la Figura (8.6), se muestran varias rectas que pasan por el polo y sus respectivas ecuaciones.

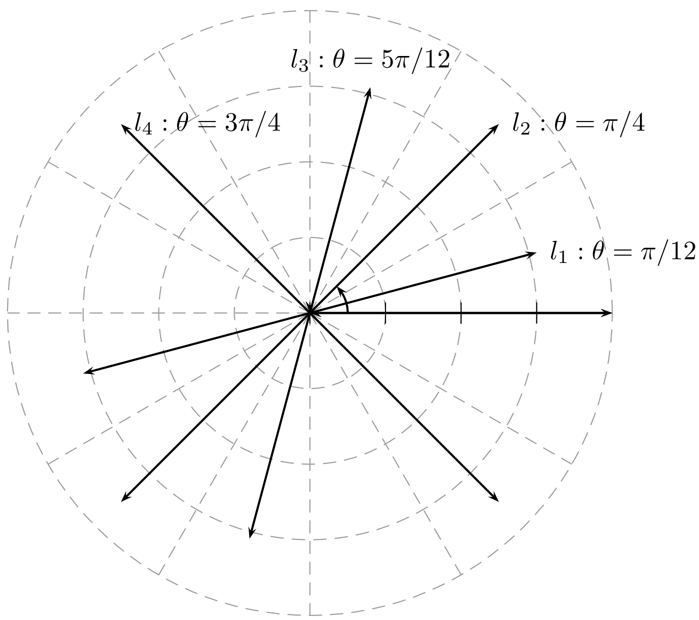

Figura 8.6 Rectas que pasan por el polo, con sus respectivas ecuaciones.

Considere ahora una recta que corta perpendicularmente al eje polar a una distancia a del polo. Tal recta tiene como ecuación en coordenadas cartesianas $x = a$. Usando las ecuaciones de transformación de coordenadas se tiene que su correspondiente ecuación en coordenadas polares es

$$r\cos\theta = a. \tag{8.4}$$

Para una recta paralela al eje polar, se tiene que tal recta corta al eje a 90° a una distancia b. Tal recta tiene por ecuación, en coordenadas cartesianas $y = b$. Usando las ecuaciones de transformación de coordenadas, su correspondiente ecuación en coordenadas polares es

$$r\,\mathrm{sen}\,\theta = b. \tag{8.5}$$

En general, la ecuación de la recta que no pasa por el polo está dada en el siguiente

Teorema 8.2 *Sea l una recta que no pasa por el polo. La ecuación de l está dada por*

$$r\cos(\theta - \alpha) = d \tag{8.6}$$

donde d, es la distancia del polo a la recta y α es el ángulo que forman el eje polar con el segmento que va del polo perpendicularmente a la recta.

Demostración: Para la demostración se hacen coincidir los orígenes del sistema de coordenadas cartesianas con el de coordenadas polares de tal forma que el eje polar coincida con la parte positiva del eje x. De acuerdo con lo visto en la sección (2.4), si d es la distancia del origen (polo) a la recta y α es el ángulo que forman el eje x (eje polar) con el segmento OA que va del origen (polo) perpendicularmente a la recta como se muestra en la Figura (8.7), la ecuación normal de la recta es

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = d, \tag{8.7}$$

$P(r,\theta)$ un punto cualquiera que pertenece a la recta. Sustituyendo las expresiones de las

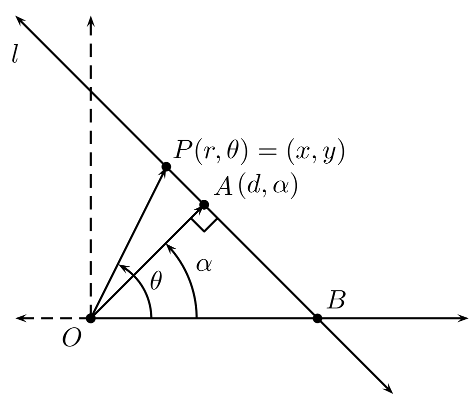

Figura 8.7 Recta l que corta al eje polar en $(a,0)$ y al eje a $90°$ en $(b.\pi/2)$ formando un ángulo α con el eje polar.

coordenadas cartesianas del punto P por sus correspondientes coordenadas polares

$$r\cos\theta\cos\alpha + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha = 0$$

de donde

$$r\cos(\theta-\alpha) = d. \tag{8.8}$$

■

EJEMPLO 8.6

Hallar la ecuación de la recta que está a 4 unidades del polo y que el segmento que va del polo perpendicularmente a la recta forma un ángulo de $\pi/6$.
Solución: Para esta recta se tiene $d = 4$, $\alpha = \pi/6$. De acuerdo con la ecuación (8.6)

$$r\cos(\theta-\pi/6) = 4.$$

8.4. Ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares

8.4.1. Ecuación de la circunferencia en coordenadas polares

Una de las ventajas del uso de las coordenadas polares es la forma que toman las ecuaciones de los lugares geométricos como las cónicas, las *cardioides* y las *espirales* entre otras. Como inicio, considere la circunferencia con centro en el polo y radio k. En este caso, la ecuación de la circunferencias toma la forma simple

$$r = k, \tag{8.9}$$

donde k es una constante.

Considere ahora la circunferencia con centro en (r_1, θ_1), radio k y sea (r, θ) un punto de la circunferencia como se muestra en la Figura (8.8). Usando la ley de los cosenos se tiene

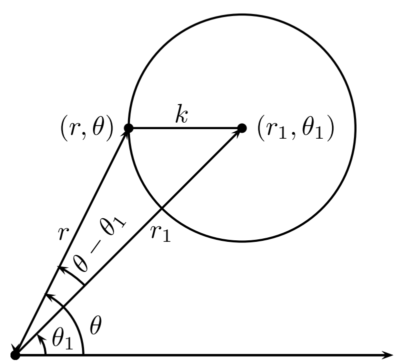

Figura 8.8 Circunferencia con centro (r_1, θ_1) y radio k.

$$k^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) \tag{8.10}$$

Así, la ecuación (8.10) es la ecuación de una circunferencia con centro (r_1, θ_1) y radio k.

Como casos particulares se tienen las ecuaciones de las circunferencias con centros en los puntos $(k, 0)$, $(k, \pi/2)$ y de radios k (ver ejercicio (8.3)).

8.5. Ecuaciones de la parábola, elipse e hipérbola en coordenadas polares

Considere un punto $P(r, \theta)$ en el plano polar, una recta l perpendicular al eje polar a p unidades de distancia del polo, y un punto A en la recta l, como se muestra en la Figura (8.9). El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a un punto fijo y a una recta fija es constante representa una cónica. Así, el polo representa el punto fijo (foco de una cónica) y la recta l es la directriz de la cónica.

$$\frac{OP}{AP} = \epsilon \tag{8.11}$$

donde ϵ, es una constante. La distancia del punto al polo es

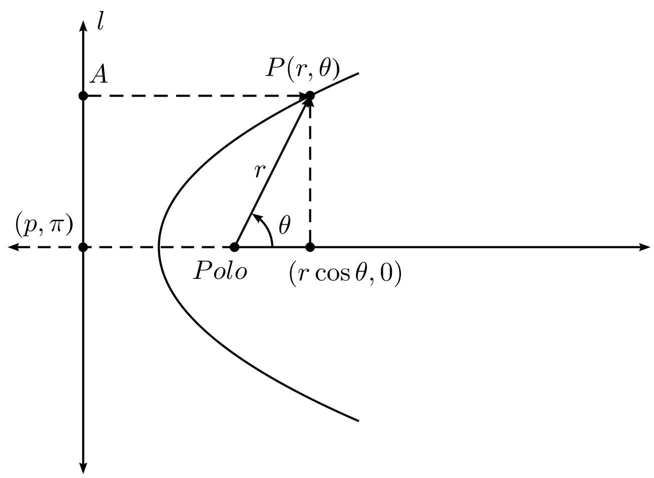

Figura 8.9 Configuración del foco y el lado recto de una cónica.

$$OP = r.$$

La distancia del punto a la recta es

$$AP = p + r\cos\theta$$

Sustituyendo las expresiones en la ecuación (8.11)

$$\frac{r}{p + r\cos\theta} = \epsilon$$

despejando r

$$r = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon\cos\theta}. \tag{8.12}$$

Observaciones:

1. La constante ϵ, representa la excentricidad de la cónica y p representa el doble de la distancia del vértice al foco. De acuerdo con el valor de la excentricidad se tiene

   a) Si, $0 < \epsilon < 1$, la ecuación corresponde a una elipse.

   b) Si, $\epsilon = 1$, la ecuación corresponde a una parábola.

   c) Si, $\epsilon > 1$, la ecuación corresponde a una hipérbola.

2. Si en la configuración de la cónica, la directriz (recta l de la Figura (8.9)), se encuentra del lado derecho del polo entonces la ecuación de la cónica cambia a

$$r = \frac{\epsilon p}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{8.13}$$

3. Si la configuración en la cónica, la directriz es paralela al eje polar entonces se tiene la ecuación
$$r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \operatorname{sen} \theta} \tag{8.14}$$
donde el signo positivo corresponde cuando la directriz esté sobre el eje polar y el signo menos corresponde cuando la directriz esta debajo del eje polar.

EJEMPLO 8.7

Dada la ecuación en coordenadas polares

$$r = \frac{4}{1 - \cos\theta}$$

Identificar a qué cónica corresponde.
Solución: La excentricidad tiene el valor de $\epsilon = 1$, por lo que se trata de una parábola que se abre lateralmente. Puesto que el numerador corresponde al producto $p\epsilon$ se tiene

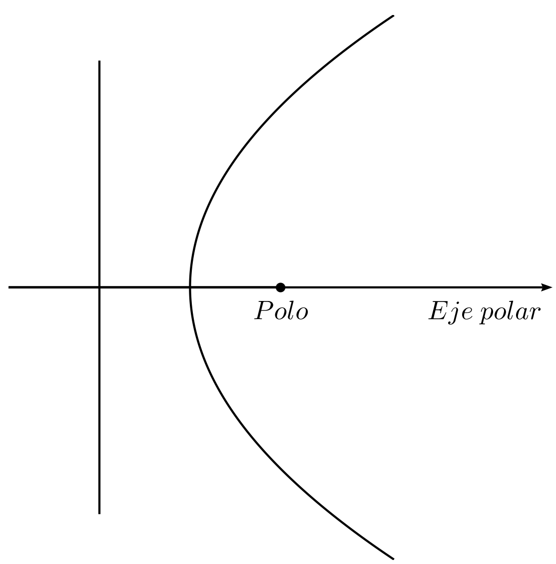

Figura 8.10 Grafica de la parábola en coordenadas polares.

$p = 4$ por lo que la distancia focal es 2. por lo tanto corresponde a una parábola horizontal que abre hacia la derecha. Tiene el foco el polo y su eje coincide con el eje polar. La grafica se muestra en la Figura (8.10).

EJERCICIOS

8.1 Hallar la distancia entre los puntos $(6, \pi/12)$ y $(8, 5\pi/12)$.

8.2 Hallar la ecuación de la recta que perpendicular al eje polar y que pasa por el punto $(3, \pi/3)$.

8.3 Usando la ecuación (8.10), hallar las ecuaciones de las circunferencias de radio k y con centro en

a) $(k, 0)$,

b) $(k, \pi/2)$.

8.4 Bosquejar las gráficas de las ecuaciones

a) $r = 4 \sec\theta$,

b) $r = 3 \csc\theta$..

8.5 Transformar la ecuación en coordenadas cartesianas a su forma en coordenadas polares.

$$3x + 2y - 1 = 0.$$

8.6 Transformar la ecuación en coordenadas cartesianas a su forma en coordenadas polares.

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

8.7 Transformar la ecuación en coordenadas polares a su forma en coordenadas cartesianas.

$$\theta = \pi/4.$$

8.8 Transformar la ecuación en coordenadas polares a su forma en coordenadas cartesianas.

$$r = a\cos(2\theta).$$

PROBLEMAS

8.1 Muestre que el área A, de un triángulo con vértice en los puntos $(0,0)$, (r_1,θ_1) y (r_2,θ_2) está dada por

$$A = \frac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

8.2 Usando las ecuaciones de transformación entre coordenadas polares y cartesianas encontrar, a partir de la fórmula de distancia entre dos puntos en coordenadas cartesianas, la correspondiente fórmula de distancia entre dos puntos en coordenadas polares.

8.3 Escribir la ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas polares

$$r = \frac{4}{1 - \cos\theta}$$

8.4 Usando la ecuación (8.8), encuentre las expresiones para las rectas que son perpendiculares o paralelas al eje polar.

8.5 Bosquejar la gráfica de la ecuación

$$r = \theta.$$

La gráfica se conoce como la espiral de Arquímedes.

8.6 Hallar la ecuación en coordenadas polares de una circunferencia de radio 1 y con centro en $(1, \pi/2)$.

8.7 A partir de la ecuación de la elipse con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

muestre que su ecuación en coordenadas polares con centro en el polo es

$$r^2(1 - e^2\cos^2\theta) = b^2.$$

8.8 Usando coordenadas polares demostrar que el polo y los puntos $(3,0)$ y $(3,\pi/3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

CAPÍTULO 9

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Hasta ahora se han desarrollado métodos para, dada la ecuación $f(x, y) = 0$, bosquejar su gráfica y dadas las condiciones de un lugar geométrico obtener su ecuación. Sin embargo, al realizar el trazo de la gráfica no se cuenta con condiciones para saber dónde *inicia* o cuál es su *orientación*. De hecho, las ecuaciones de las cónicas son usadas como modelos matemáticos para describir trayectorias de objetos y es de importancia conocer su ubicación en el plano en un *tiempo* determinado.

9.1. Ecuaciones paramétricas de curvas en el plano

Dada una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, una representación paramétrica de f es una par de ecuaciones $x = g_1(t)$ y $y = g_2(t)$ tales que al eliminar la variable t se recupera la ecuación $f(x, y) = 0$. La nueva variable t se llama el *parámetro.*. Las ecuaciones paramétricas para $f(x, y) = 0$ no son únicas y tampoco existe una metodología para determinarlas. Las ecuaciones paramétricas generalmente se escogen por su utilidad y forma.

EJEMPLO 9.1

Encuentre ecuaciones paramétricas para la circunferencia dada por

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Solución: Las ecuaciones

$$\begin{aligned} x =& r\cos t, \\ y =& r\,\mathrm{sen}\, t \end{aligned}$$

son ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en el origen y radio r. En efecto, elevando al cuadrado ambas ecuaciones paramétricas y sumando

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\,\mathrm{sen}^2\, t = r^2(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t) = r^2.$$

EJEMPLO 9.2

Encuentre ecuaciones paramétricas para la elipse dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solución: Las ecuaciones

$$\begin{aligned} x =& a\cos t, \\ y =& b\,\mathrm{sen}\, t \end{aligned}$$

son ecuaciones paramétricas de la elipse con centro en el origen y semiejes mayor y menor $a,\ b$ respectivamente. En efecto, dividiendo la primera ecuación con a, la segunda con b, elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t = 1.$$

9.2. Representación cartesiana de ecuaciones paramétricas

En esta sección se abordará el problema inverso; dadas las ecuaciones paramétricas $x = g_1(t)$ y $y = g_2(t)$ obtener su ecuación cartesiana. Para esto, no existe una metodología para eliminar el parámetro t y recuperar la cartesiana $f(x,y) = 0$. Puesto que las ecuaciones paramétricas no necesariamente son ecuaciones lineales, en la práctica es necesario contar con habilidades algebraicas y eventualmente trigonométricas.

EJEMPLO 9.3

Dadas las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x =& a\sec t, \\ y =& b\tan t \end{aligned}$$

encuentre su correspondiente ecuación cartesiana.

Solución: Dividiendo la primera ecuación con a, la segunda con b, elevando al cuadrado ambas ecuaciones y restando

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 t - \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = 1.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas corresponden a una hipérbola con centro en el origen cuyas ramas abren lateralmente.

EJEMPLO 9.4

Dadas las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x =& r\frac{2t}{1+t^2}, \\ y =& r\frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

encuentre su correspondiente ecuación cartesiana.
Solución: Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando los resultados

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{(1+t^2)^2}(4t^2 + (1-t^2)^2) = \frac{r^2}{(1+t^2)^2}(1+t^2)^2 = r^2.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas corresponden a una circunferencia con centro en el origen y radio r.

9.3. Aplicaciones de las ecuaciones paramétricas

9.3.1. Tiro parabólico

Cuando un proyectil es lanzado con una velocidad inicial v_0 formando un ángulo θ con la horizontal y sólo se considera la aceleración de la gravedad g, se tiene las siguientes ecuaciones que describen su movimiento en las coordenadas x, y

$$\begin{aligned} x =& tv_0 \cos\theta, \\ y =& tv_0 \operatorname{sen}\theta - \frac{g}{2}t^2. \end{aligned}$$

donde t representa el tiempo. Despejando el tiempo en la ecuación para x y sustituyendo en la ecuación para y

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2,$$

de acuerdo con los resultados de la sección (5.4) representa una parábola vertical que abre hacia abajo y tiene su punto máximo en

$$(h,k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

En este caso, $a = -g/2v_0^2\cos^2\theta$, $b = \tan\theta$ y $c = 0$. Por lo tanto el punto máximo del proyectil es

$$(h,k) = \left(\frac{v_0^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}{2g}, \frac{v_0^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{2g}\right) \tag{9.1}$$

En la Figura (9.1) se muestra la trayectoria de un proyectil disparado con una velocidad inicial de magnitud v_0 con un ángulo θ, respecto de la horizontal.

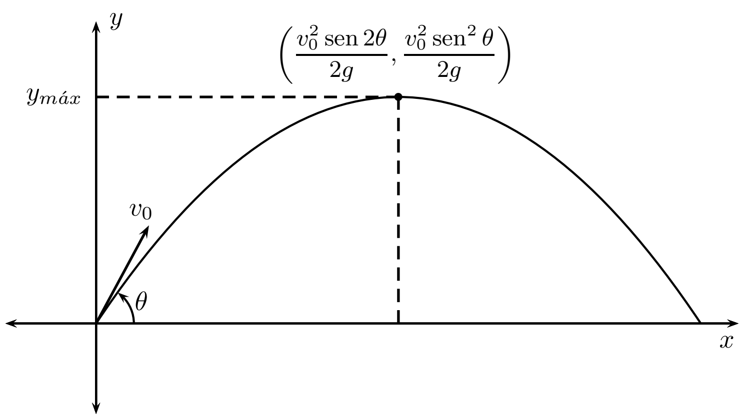

Figura 9.1 Trayectoria de un proyectil disparado con una velocidad inicial de magnitud v_0 y un ángulo θ respecto de la horizontal.

EJEMPLO 9.5

Un proyectil se dispara con una magnitud de velocidad de 40 m/s formando un ángulo con la horizontal de 30°. Hallar su altura y alcance máximos así como el tiempo total del recorrido.

Solución: En este caso $v_0 = 40$ m/s, $\theta = 30°$. De acuerdo con la ecuación (9.1) la altura máxima es

$$y_{máx} = \frac{v_0^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{2g} = \frac{40^2\,\mathrm{sen}^2\,30}{2(9.8)} = \frac{200}{9.8} \simeq 20.41\text{ m}.$$

Esta altuma máxima se alcanza a la mitad del recorrido en x, por lo que el recorrido total es

$$x_{máx} = \frac{v_0^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}{g} = \frac{40^2\,\mathrm{sen}\,60}{9.8} = \frac{800\sqrt{3}}{9.8} \simeq 141.39\text{ m}.$$

El tiempo total del recorrido t_t es

$$t_t = \frac{141.39}{40\cos 30°} \sim 4.08\text{ s}.$$

EJERCICIOS

9.1 Obtenga la ecuación en coordenadas cartesianas de la ecuación paramétrica

$$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad y = a \cos \theta$$

9.2 Dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{2}{t}, \quad y = \frac{t}{2}$$

Encuentre la ecuación cartesiana y bosqueje su gráfica.

9.3 Dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = t + 1, \quad y = t(t + 2)$$

Encuentre la ecuación cartesiana y bosqueje su gráfica.

9.4 Dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{1}{2} \cos t, \quad y = \cos 2t$$

Encuentre la ecuación cartesiana y bosqueje su gráfica.

PROBLEMAS

9.1 Dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{2at^2}{t^2+1}, \quad y = \frac{2at^3}{t^2+1}.$$

Encuentre la ecuación cartesiana. *La gráfica representa la cisoide de Diocles.*

9.2 Dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1-\cos\theta).$$

Encuentre la ecuación cartesiana. *La gráfica representa una cicloide.*

9.3 Demostrar que los tiempos t_1 en que un proyectil alcanza su altura máxima y t_2 en que el proyectil realiza su máximo recorrido son

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}, \\ t_2 &= \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}. \end{aligned}$$

9.4 Se dispara un proyectil desde el suelo con $v_0 = 100$ m/s, formando un ángulo de $30°$ con la horizontal. Hallar

a) El alcance máximo en la dirección horizontal y el tiempo que le tomó el recorrido.

b) La altura máxima y el tiempo que le tomó alcanzarla.

APÉNDICE A

INTERSECCIÓN DE RECTAS

Una gran variedad de problemas de matemáticas aplicadas son modelados por *sistemas de ecuaciones lineales*, es decir, por dos o más ecuaciones que representan líneas rectas. En la mayorías de estos casos es de especial interés conocer los puntos en común o de corte en dichas rectas. Encontrar los puntos de corte se conoce como *resolver el sistema*. Para esto, considere el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

$$\begin{aligned} ax + by = c \ &\rightarrow (e1) \\ dx + ey = f \ &\rightarrow (e2) \end{aligned}$$

El objetivo es presentar métodos para encontrar los valores de $x,\ y$ que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

A.1. Método por igualación

Este método consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones. Así, si ambos coeficientes de la variable y son diferentes de cero, entonces las ecuaciones $(e1)$ y $(e2)$ se pueden reescribir como

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \ \rightarrow (e3)$$
$$y = -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e} \ \rightarrow (e4),$$

puesto que en la solución que se busca, y, es la misma en ambas ecuaciones, entonces igualando las ecuaciones $(e3)$ y $(e4)$, se obtiene

$$-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} = -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e},$$

transponiendo los términos con x en un lado y los términos contantes del otro lado de la igualdad

$$\frac{d}{e}x - \frac{a}{b}x = \frac{f}{e} - \frac{c}{b},$$

factorizando x, haciendo la suma de fracciones en ambos lados y simplificando

$$(db - ae)x = (fb - ec),$$

si $db - ae \neq 0$, entonces

$$x = \frac{fb - ec}{db - ae}.$$

El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones $(e1)$ o $(e2)$ para obtener el correspondiente valor de y.

EJEMPLO A.1

Resolver el sistema de ecuaciones

$$3x - y + 5 = 0,$$
$$2x + y - 10 = 0.$$

Solución: Los coeficientes de y, son 1 y -1, por lo que despejado y en ambas ecuaciones se tiene

$$y = 3x + 5,$$
$$y = -2x + 10,$$

igualando,

$$3x + 5 = -2x + 10,$$

de donde,

$$5x = 5 \ \text{ o } \ x = 1.$$

Una vez hallado el valor de x se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo, en la primera

$$3(1) - y + 5 = 0 \ \text{ o } \ y = 8.$$

A.2. Método por suma y resta

En este método se multiplica cada una de las ecuaciones con *factores adecuados*, de tal forma que los coeficientes de alguna de las variables sea el mismo. Así, ambas ecuaciones se suman o se restan para eliminar una de las variables y reducir el problema a una ecuación lineal de una variable. Considere de nuevo el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= c \ \rightarrow (e1) \\ dx + ey &= f \ \rightarrow (e2). \end{aligned}$$

Paras eliminar la variable y, la ecuación $(e1)$ se multiplica con e y la ecuación $(e2)$ con b obteniendo

$$\begin{aligned} eax + eby &= ec \\ bdx + bey &= bf. \end{aligned}$$

Restando $(e2)$ a $(e1)$

$$(ea - bd)x = ec - bf,$$

la cual es una ecuación de una sola variable y si $db - ae \neq 0$ entonces se tiene como solución

$$x = \frac{ec - bf}{ea - bd}.$$

La solución obtenida para x es la misma que se obtuvo mediante el método de igualación. El procedimiento para encontrar y es por tanto similar.

EJEMPLO A.2

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - y &= -5, \\ 2x + y &= 10. \end{aligned}$$

Solución: En este caso los coeficientes de y son iguales en valor absoluto y de signo opuesto por lo que unicamente bastaría con sumar ambas ecuaciones para eliminar la variable y. Sin embargo, para mostrar el procedimiento de este método se procede a eliminar la variable x. Así, la primera ecuación la multiplicamos con 2 y la segunda ecuación la multiplicamos con 3, obteniendo

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= -10, \\ 6x + 3y &= 30. \end{aligned}$$

restando la segunda ecuación a la primera

$$-5y = -40 \ \text{ o } \ y = 8.$$

Sustituyendo $y = 8$ en la primera ecuación

$$3x - 8 = -5 \ \text{ o } \ x = 1.$$

A.3. Método por substitución

Este método consiste en despejar una de las variables x o y de alguna de las ecuaciones. La expresión que resulte se sustituye en la otra ecuación y de esta forma se obtiene una ecuación de una sola variable. Así despejando y de la primera ecuación del sistema de ecuaciones $(e1,\ e2)$

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

sustituyendo en la segunda ecuación

$$dx + e\frac{(c - ax)}{b} = f,$$

de nuevo, si $db - ae \neq 0$, entonces

$$x = \frac{fb - ec}{db - ae}.$$

La expresión encontrada para x, es la misma que la encontrada en los dos métodos anteriores.

EJEMPLO A.3

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - y + 5 &= 0, \\ 2x + y - 10 &= 0. \end{aligned}$$

En ambas ecuaciones la variable indicada para despejar es y. Despejando y, de la primera ecuación tenemos

$$y = 3x + 5,$$

substituyendo en la segunda ecuación

$$2x + (3x + 5) - 10 = 0 \text{ o } x = 1.$$

ahora substituyendo $x = 1$, en la segunda ecuación

$$2(1) + y - 10 = 0, \text{ de donde, } y = 8.$$

Geometría Analítica Universitaria

Entre los principales objetivos de las matemáticas se encuentran: el proveer métodos para medir y contar y, el más importante, propiciar el desarrollo del pensamiento lógico. *Geometría Analítica Universitaria* ofrece una opción para cubrir estos dos objetivos tan importantes de las matemáticas. Es recomendable que el estudiante resuelva los problemas propuestos y ponga atención especial a las demostraciones de teoremas geométricos por el método analítico, de este modo, el estudiante contará tanto con conocimientos sólidos de geometría analítica como con habilidades matemáticas para plantear y resolver problemas analíticamente.

ISBN: 978-607-8792-37-5